VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

TRABAJO DE FIN DE GRADO
EN MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

ESCUELA UNIVERSITARIA DE MAGISTERIO DE ZAMORA

TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

NIVEL DE DIFICULTAD COGNITIVA Y GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN EL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA RELACIONADO CON LOS RESULTADOS DEL TIMSS

AUTOR: José Carlos Álvarez Riesco
Tutor: Santiago Vicente Martín

Zamora, 10 de septiembre de 2014

Nivel de dificultad cognitiva y grado de autenticidad de los problemas de matemáticas en el primer ciclo de Educación Primaria relacionado con los resultados del TIMSS

RESUMEN

En el presente trabajo se pretende analizar los problemas de matemáticas en el primer ciclo de Educación Primaria desde dos vertientes: por un lado se analizará la dificultad cognitiva de los problemas de matemáticas y, por otro lado, se estudiará su grado de autenticidad. Este análisis se realizara con el objetivo de conocer en qué manera influye el grado de autenticidad y la dificultad cognitiva de los problemas de matemáticas en la enseñanza y resolución de problemas. Para tal propósito se tendrán en cuenta estudios previos como el modelo teórico de resolución de problemas de Lieven Verschaffel de 2000 o estudios empíricos previos como el realizado por Fien Depaepe en 2009. Además, se analizarán los resultados del informe TIMSS correspondientes a 2011 para valorar el nivel de nuestros alumnos en matemáticas. Los resultados obtenidos tras analizar 83 y 94 problemas de matemáticas en 1º y 2º, respectivamente, demostrarán que los problemas son en su mayoría consistentes, de una dificultad cognitiva baja, y no son, en su mayoría auténticos, ya que estos problemas son utilizados en la escuela como “recipientes” para practicar una determinada operación matemática y no para simular una situación real. Finalmente se realizará una prueba a 44 alumnos de 1º y 41 alumnos de 2º de Educación Primaria para comprobar si los alumnos realizan mejor los problemas auténticos y los perciben como más útiles. Los resultados obtenidos en esta prueba confirmarán que, efectivamente, los alumnos resuelven mejor los problemas que se aproximan más a la realidad que aquellos que no lo hacen y, además, son percibidos como más interesantes y útiles. Esto confirma que el Modelo Situacional o Modelo Genuino de Verschaffel es más eficaz que el Modelo Superficial o Modelo Tradicional de resolución de problemas en la resolución de problemas de una dificultad cognitiva mayor. También se comprobó que los alumnos son capaces de resolver mejor los problemas auténticos que se aproximan a situaciones más reales cercanas a ellos.

Cognitive difficulty level and authenticity degree on math problems in first cycle of Primary Education according to results in TIMSS

ABSTRACT

In the current work is expected to analyze the math problems in the first cycle of Primary education from two different perspectives: on the one hand, cognitive difficulty of the math problems will be analyzed and, on the other hand, the authenticity degree of every problem will be studied. This analysis was carried out with the purpose of knowing how much the authenticity degree and how much the cognitive difficulty influence in mathematics teaching and problem solving. For this purpose, previous studies related with this matter will be taken into account such as Lieven Verschaffel's theoretical model of problem solving, in 2000, or previous empirical studies like the one conducted by Fien Depaepe, in 2009. In addition, the results from the corresponding TIMSS 2011 report will be also analyzed to assess the level of our students in Mathematics. The results provided after analyzing 83 and 94 math problems in first and second year of Primary Education, respectively, show that math problems are mostly consistent, with a low cognitive difficulty, and most of them are not authentic problems because of they are used at school as "containers" to practice a particular mathematical operation instead of simulating a real situation. Finally, a test will be carried out to 44 students and 41 students in first and second year of Primary Education to check whether students resolve math problems that are closer to reality better than those that aren´t and they perceive them as more useful. The results of this test will confirm that, indeed, students are better problem solvers in problems which are closer to reality and students also perceive these problems as more interesting and useful. This confirms that Verschaffel's Situation Approach or Genuine Approach is more effective than the Superficial Approach or Traditional Approach in high cognitive difficulty problem solving. It was also demonstrated that students are able to resolve authentic problems, in a better way, if these problems are closer to real situations close to the own students.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS DEL TRABAJO

Antes de presentar el siguiente Trabajo de Fin de Grado: Nivel de d*ificultad cognitiva y grado de autenticidad de los problemas de matemáticas en el primer ciclo de Educación Primaria relacionado con los resultados del TIMSS*, es conveniente aclarar que el significado que adquiere el término "problema de matemáticas" a lo largo de este trabajo se refiere a "problemas aritméticos verbales". Es decir: "descripciones verbales de situaciones, generalmente presentadas en un contexto escolar, en las que se plantean una cuestión cuya solución se obtiene al aplicar una o más operaciones matemáticas con los datos que aparecen en dicha situación o problema" (Verschaffel, 2000).

Tras esta aclaración, la resolución de problemas de matemáticas (problemas aritméticos verbales) y, más importante todavía, la resolución de situaciones reales donde se precisa el uso de operaciones matemáticas sencillas forman una de las metas principales a alcanzar a lo largo de la Educación Primaria y, en especial, en el primer ciclo de Educación Primaria, etapa escolar en la que está dirigido o enfocado este trabajo, ya que es en este periodo cuando los alumnos comienzan a familiarizarse con la resolución de problemas de matemáticas, de ahí su relevancia.

Asimismo, la justificación e importancia en la actualidad de este trabajo surgen tras los últimos resultados obtenidos en TIMSS 2011 por los alumnos españoles. Dichos resultados hacen ver que el rendimiento de nuestros alumnos en matemáticas es bajo y con este trabajo se pretende analizar tal problema desde el punto de vista de la Psicología, centrándome exclusivamente en la enseñanza y resolución de problemas, partiendo de la hipótesis de que estos resultados tan bajos pueden ser debidos a una no correcta preparación en la escuela. Es ampliamente conocido el grado de dificultad que la resolución de problemas de matemáticas presenta entre el alumnado, así como la dificultad que muestran los alumnos para resolver situaciones cotidianas en donde se requiere la aplicación de conocimientos matemáticos. Muchos investigadores han tratado de identificar las causas de esta dificultad que muestran los alumnos para resolver problemas de matemáticas.

Por consiguiente, el objetivo del trabajo que aquí presento es conocer en qué manera influye el grado de autenticidad y la dificultad cognitiva de los problemas de matemáticas (problemas aritméticos verbales) en la enseñanza y resolución de problemas.

Para alcanzar tal objetivo, empezaré analizando modelos teóricos previos como el modelo de Verschaffel (2000) en el que, desde una perspectiva cognitiva, se pretende describir el proceso de resolución de problemas, argumentando la relación que existe entre grado de autenticidad y éxito en la resolución de problemas. Posteriormente, estudios empíricos como el realizado por Depaepe *et al*. (2009) relacionados con el grado de autenticidad que existe en los problemas de matemáticas de los libros de texto también será analizado y valorado en el presente trabajo.

Este marco teórico servirá de punto de partida para analizar la dificultad cognitiva y el grado de autenticidad que tienen los problemas de matemáticas de un libro cualquiera de texto que podríamos encontrarnos en un aula de matemáticas de primer ciclo de Educación Primaria en nuestro país.

Los resultados obtenidos tras este análisis permitirán emitir una propuesta de mejora que permita optimizar los resultados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en lo que a resolución de problemas se refiere.

Asimismo, con el fin de demostrar que la propuesta de mejora resulta eficaz, se realizará una aplicación práctica con alumnos reales de primero y segundo de Educación Primaria (1er ciclo) para demostrar si los alumnos no solo realizan mejor los problemas auténticos sino que los perciben como más útiles. Los resultados de dicha prueba me permitirán cerciorarme de que la propuesta de mejora sugerida tiene éxito y, por lo tanto, su aplicación práctica, a posteriori, podría resultar eficaz en el aula de Primaria.

Finalmente, se realizará una breve reflexión sobre las conclusiones obtenidas en este trabajo así como su posible aportación al estado actual de la cuestión.

2. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA Y RELEVANCIA EN LA ACTUALIDAD: INFORME TIMSS 2011

La importancia o relevancia de este tema en la actualidad deriva de los últimos resultados emitidos por el informe TIMSS 2011, los cuales no son muy alentadores en cuanto al nivel de competencias matemáticas que muestran los alumnos españoles.

El bajo rendimiento en matemáticas de nuestros alumnos de Educación Primaria en la actualidad es el problema inicial del que parte este trabajo. Problema que se pretende analizar desde el ámbito de la Psicología y enfocándolo, únicamente, en la resolución de problemas de matemáticas.

2.1. ¿EN QUÉ CONSISTE EL INFORME TIMSS?

Según *PIRLS - TIMSS 2011: Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias* (citado en MECD: INEE, 2012), los inicios de TIMSS se remontan a 1964, como prueba solo de matemáticas que, en los años ochenta, se bifurcaría en estudios separados de matemáticas y ciencias. Los estudios de TIMSS (*Trends in Mathematics and Science Study)* se centran en evaluar el rendimiento de los alumnos en las áreas de matemáticas y ciencias. Dicha prueba es dirigida desde el International Study Center del Boston College en Estados Unidos, coordinando la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, por sus siglas en inglés). Asimismo es el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) el encargado de coordinar y desarrollar estos estudios en España, trabajando junto con las comunidades autónomas.

TIMSS evalúa alumnos al final del cuarto año de escolarización del ISCED 1 (International Standard Classification of Education) o primera etapa de escolarización obligatoria, que en España corresponde al cuarto curso de Educación Primaria. Según Mullis, "esta etapa constituye un momento importante del aprendizaje del alumno. En este momento los alumnos suelen haber aprendido a leer y ahora están leyendo para aprender". (Mullis, 2009, citado en MECD: INEE, 2012).

En cuanto a los dominios de evaluación en TIMSS, pese a ser distintos para matemáticas y ciencias, en ambas se distinguen dos tipos de dominio: dominios de contenido (conocimiento de hechos y conceptos) y dominios cognitivos (destrezas y procedimientos).

Los dominios de contenido se dividen en áreas temáticas, desglosándose a su vez en capacidades que pueden ser evaluables. Los dominios cognitivos de TIMSS son clasificados en tres categorías: “conocer”, “aplicar” y “razonar”. Cada uno de estos dominios incluye una serie de habilidades o destrezas diferentes.

Otra de las características del informe TIMSS es la inclusión de un cuestionario para obtener información sobre el contexto del niño, estableciendo así un enlace entre la influencia que pueda ejercer éste en el rendimiento académico del alumno. Dicho cuestionario va dirigido no solo al alumno sino a su familia, profesorado y centro en el que estudia. Por último, en la elaboración del informe TIMSS también es tenido en cuenta el sistema educativo y el currículo de los países participantes.

2.2. INFORME TIMSS 2011

Los países que participaron en TIMSS 2011 vienen en el anexo II de este trabajo *(ver Tabla II: Países participantes en TIMSS 2011, en Anexo I: Informe TIMSS 2011).*

En cuanto a la muestra española que participó en TIMSS 2011 fue de 4183 alumnos provenientes de 151 centros educativos diferentes. En función de los resultados obtenidos, los alumnos son agrupados en cuatro niveles de rendimiento dependiendo del nivel de conocimientos y destrezas demostrados en la prueba. Estos grupos o niveles están delimitados por puntos de referencia internacionales fijados en 400, 475, 550 y 625 en función de la puntuación obtenida tras la correcta contestación de los ítems:

NIVELES DE RENDIMIENTO	PUNTUACIÓN
Nivel Bajo	De 400 a 475 puntos
Nivel Intermedio	De 475 a 550 puntos
Nivel Alto	De 550 a 625 puntos
Nivel Avanzado	625 o más puntos

Tabla III: Niveles de rendimiento en TIMSS (adaptado de MECD: Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2012)

Además de estos cuatro niveles de rendimiento, se añade un quinto nivel, muy bajo, correspondiente a las puntuaciones inferiores a 400 puntos.

Una vez mostrado el procedimiento que sigue TIMSS y la categorización en niveles de rendimiento que realiza, los resultados, por promedios globales ordenados de forma decreciente aparecen en el Anexo I de este trabajo *(ver Figura III: Promedios globales en matemáticas en TIMSS 2011, en Anexo I: Informe TIMSS 2011)*. Estos resultados fueron los siguientes:

España logró 482 puntos, puntuación por debajo de la media de la OCDE (522 puntos) y de la media europea (519 puntos). Si comparamos a España con el resto de países europeos, tan solo Rumanía y Polonia están por debajo en cuanto a resultados aunque, como se aprecia en el gráfico *(ver Figura III, en Anexo I: Informe TIMSS 2011)*, la diferencia con estos países no es muy significativa. El país que obtiene mejores resultados es Hong Kong-China con una puntuación media de 602 puntos, muy por encima de la media y, por lo tanto, de la española, superándola en una diferencia de 120 puntos. Por otra parte, el país que obtuvo la puntuación media más baja fue Arabia Saudí con 410 puntos, 72 puntos menos que la media española. Aproximadamente la mitad de los países participantes en TIMSS-matemáticas 2011 tienen puntuaciones superiores al punto de referencia de 500 puntos (línea roja). Zona de referencia en la que España se sitúa por debajo.

También puede apreciarse como países con un mayor desarrollo económico y cultural ocupan, más o menos, los puestos más altos del gráfico *(ver Figura III, en Anexo I: Informe TIMSS 2011)*. Lo cual podría reflejar una relación entre desarrollo económico y cultural con mejores resultados a nivel educativo.

Si tenemos en cuenta que España forma parte de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) la diferencia con el resto de países miembro que participaron en TIMSS-matemáticas 2011 resulta alarmante. España se sitúa a la cola de la OCDE en resultados en matemáticas como puede apreciarse en la figura IV del Anexo I de este trabajo *(ver Figura IV: Promedios en matemáticas de los países OCDE en TIMSS 2011, en Anexo I: Informe TIMSS 2011).*

Si valoramos ahora los porcentajes de alumnos pertenecientes a los niveles de rendimiento definidos en TIMSS, éstos fueron representados de la siguiente manera, ordenados desde nivel muy bajo hasta nivel avanzado. Como puede apreciarse en la figura V del Anexo I de este trabajo *(ver Figura V: Porcentajes de alumnos por niveles en TIMSS-matemáticas 2011, en Anexo I: Informe TIMSS 2011):*

Como se aprecia en los resultados *(ver Figura V, en Anexo I: Informe TIMSS 2011),* en España hay un 13% de alumnos con un nivel de rendimiento en matemáticas muy bajo (por debajo de 400 puntos) en el que se considera que el aprendizaje de las matemáticas no ha sido eficaz. En el conjunto de países de la OCDE, tan solo un 7% de los alumnos está en este nivel muy bajo. El 31% de los alumnos españoles está en un nivel bajo de rendimiento, un 11% más que la OCDE (20%). El 39% de los alumnos españoles está en un nivel intermedio, un 1% por debajo de la OCDE. El 16% de los alumnos españoles está en un nivel alto de rendimiento en matemáticas, un 12% menos que en la OCDE. Por último tan solo un 1% de nuestros alumnos está en un nivel avanzado, porcentaje por debajo de la OCDE (5%) y de la mediana internacional (4%)

El país cuyo mayor número de alumnos está en el nivel avanzado de rendimiento es Hong Kong-China con un 37% y, por el contrario, el país con mayor número de alumnos en el nivel de muy bajo rendimiento sería Arabia Saudí con un 45%.

Esto hace ver que el sistema educativo español no puede permitirse tener porcentajes tan elevados de alumnos en los niveles de muy bajo-bajo rendimiento. Habría que realizar un esfuerzo por atender a estos alumnos que presentan dificultades en cuarto curso, curso en el que se ha realizado esta prueba, desde edades tempranas. También, por otro lado, se deberá atender las necesidades de esos alumnos de nivel alto-avanzado (16% y 1%, respectivamente) para conseguir aumentar los porcentajes en ambos grupos.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. MODELO TEÓRICO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VERSCHAFFEL

Gran parte de la importancia de las matemáticas reside en su aplicación en situaciones cotidianas del día a día en donde conocimientos matemáticos son requeridos para resolver determinadas situaciones encontradas o planteadas. A fin de entender y analizar este proceso que llevamos a cabo cuando resolvemos un problema de matemáticas, Verschaffel, en el año 2000, propuso un modelo teórico útil para resolver un problema de matemáticas que tuviera en cuenta factores externos, permitiendo poder equiparar el problema en cuestión a cualquier problema encontrado en el día a día, "problema auténtico". Este modelo recibió la nomenclatura de "Modelo Genuino o Modelo Situacional" *(Genuine Approach)*. Este Modelo Situacional o Modelo de Verschaffel fue estructurado de la siguiente manera:

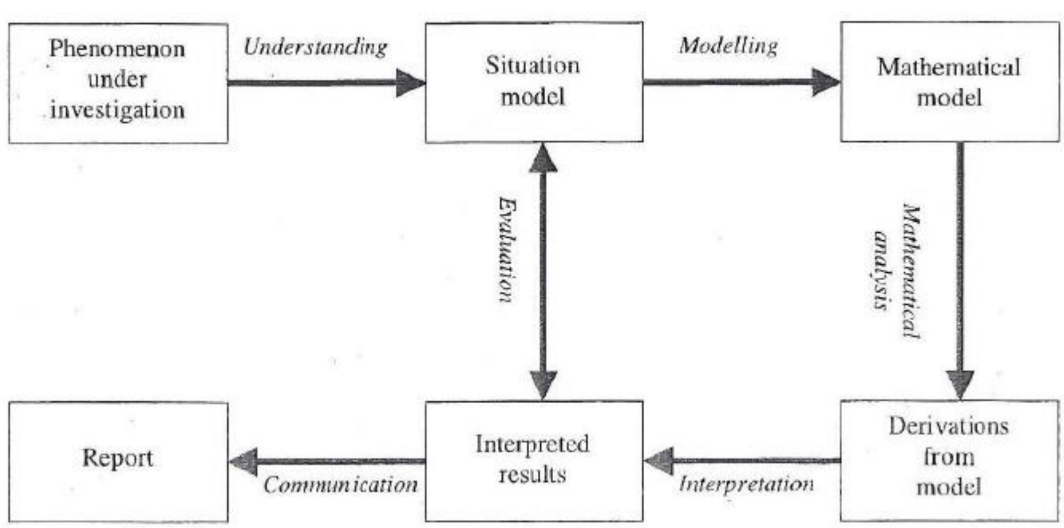


Figura I: Esquema del Modelo Situacional o Modelo Genuino de Verschaffel (encontrado en Verschaffel *et al.*, 2000, p. 92).

Como se puede apreciar en el esquema anterior, el modelo de Verschaffel consta de las siguientes fases, representadas en el esquema por medio de flechas (Verschaffel, 2000):

1. ***Understanding:*** En primer lugar, es importante entender el fenómeno (problema de matemáticas) que se pretende investigar o resolver *(phenomenon under investigation)* para guiarlo hacia un modelo en el que los datos relevantes, relaciones entre ellos y condiciones se correspondan a una situación determinada *(Situation model).*
2. ***Modelling:*** Acto seguido, se deberá construir un modelo matemático *(Mathematical model)* con los datos relevantes, relaciones y condiciones del problema de tal forma que se adapten al modelo situacional (*Situation model*).
3. ***Mathematical Analysis:*** Una vez identificado el modelo matemático del problema (*Mathematical model*) se aplicará los conocimientos matemáticos oportunos a fin de resolver el problema planteado.
4. ***Interpretation:*** Se realizarán las operaciones matemáticas elegidas anteriormente, obteniendo una solución al problema planteado.
5. ***Evaluation:*** Es preciso comprobar que la solución obtenida es apropiada y lógica para el problema del que hemos partido, adaptándose a la realidad, es decir, al modelo situacional del problema *(Situation model).*
6. ***Communication:*** Finalmente se da a conocer o se emite la solución del problema que hemos obtenido.

Como se puede apreciar en el esquema anterior, Verschaffel aboga por una interpretación situacional *(Model Situation)* como paso previo a la interpretación matemática del problema *(Mathematical Situation).* Así como, antes de emitir el resultado final del problema, realizar una evaluación situacional *(Evaluation)* del resultado a fin de comprobar que dicha solución es lógica y, por lo tanto, se adapta a la realidad del problema planteado.

El autor defiende que, para resolver un problema de matemáticas, no solo vale con operar los datos del problema sino que se debe tener en cuenta factores externos que afecten a la situación de dicho problema. Es decir, un problema de matemáticas se debe resolver por el Modelo Situacional en lugar de, únicamente, por el Modelo Matemático.

Para aclarar esta última afirmación, me gustaría proponer un problema típico de matemáticas para evidenciar la propuesta de Verschaffel a favor del Modelo Situacional:

"Un atleta tarda 10,5 segundos en recorrer 100 metros, ¿cuánto tardará en recorrer 400 metros?"

A lo largo de nuestra etapa académica, hemos resuelto muchos problemas de este tipo. A priori, si tenemos en cuenta, únicamente, el Modelo Matemático *(Mathematical model)*, la respuesta al problema parece sencilla. Se trata de un problema de proporción directa en el que "si nuestro atleta ha recorrido 100 metros en 10,5 segundos, en recorrer 400 metros tardará 42 segundos". Pero, en términos de autenticidad, es decir, si tratamos de resolver el mismo problema teniendo en cuenta su Modelo Situacional *(Situation model),* en la realidad, resultará imposible que un atleta mantenga esa velocidad constante cada 100 metros ya que, por muy bueno que sea nuestro atleta, el cansancio le pasará factura, haciéndole perder velocidad según avance los metros. Por lo tanto, la solución de 42 segundos, no sería auténtica ya que no se corresponde con la realidad del problema. Ejemplos como el problema anterior, no siguen el Modelo Genuino o Modelo Situacional que defiende Verschaffel sino que siguen el modelo tradicional de resolución de problemas o Modelo Superficial.

3.1.1. MODELO SUPERFICIAL

Para Verschaffel (2000) el modelo superficial o modelo tradicional de resolución de problemas *(Superficial approach)* utiliza los problemas de matemáticas como meros "recipientes" para entrenar al alumno en una determinada destreza, entiéndase ésta como: sumar, restar, multiplicar, dividir, etc. De esta forma, este modelo tradicional enseña al alumno a limitarse, únicamente, en identificar la operación matemática necesaria para resolver el problema *(Mathematical model),* sin importar el contexto del problema *(Situation model)*. Por consiguiente, el alumno aplica automáticamente la operación matemática en cuestión sin pararse a reflexionar si el resultado obtenido carece de sentido o no en la realidad.

Utilizando el ejemplo del problema del corredor, anteriormente mencionado, la mayoría de los alumnos a quienes se les planteara este problema, presuntamente, darían como solución al problema que el corredor tardaría 42 segundos en recorrer los 400 metros. Esto es debido a que este modelo tradicional de resolución de problemas sigue en vigor en nuestros días. Los alumnos, en este caso, se limitarían a identificar la operación a realizar (regla de proporción directa) y a operar, sin pararse a pensar sobre la falta de autenticidad del resultado obtenido.

Para Verschaffel (2010), los problemas de matemáticas no son meros recipientes sino que su función es más importante. Su propósito, en el ámbito escolar, es saber aplicar, en situaciones que el alumno podría encontrarse en su día a día, los conocimientos matemáticos aprendidos en clase sin la necesidad de tener ese contacto real con la situación planteada. La idea "implícita" de ello es traer la realidad a la clase de matemáticas para crear ocasiones o situaciones que permitan simular, lo más fielmente posible, problemas reales que el alumno podría hallar fuera de la escuela. De tal forma que los alumnos puedan estar preparados o capacitados para afrontar dichos problemas en la realidad.

Según nuestro autor, para tal fin, es imprescindible el enlace entre las matemáticas que el niño aprende en la escuela y la realidad. Es decir, los problemas de matemáticas deben ser auténticos, es decir, describir lo más fielmente posible situaciones reales. Sin embargo, el gran problema surge cuando la mayoría de los problemas que aparecen en los libros de texto no tienen en cuenta la parte situacional para ser resueltos *(Situation model),* y, por lo tanto, no se ajustan a la realidad del alumno.

Numerosas investigaciones corroboran esa desvinculación entre los problemas de matemáticas y la realidad. Destacan las realizadas a finales de los 80' y en los 90' por numerosos psicólogos y educadores relacionados con la disciplina de las matemáticas (Boaler, 1994; Davis, 1989; Gerofsky, 1997; Jacob, 1997; Lave, 1992; Reusser & Stebler, 1997, citadas en Verschaffel *et al*., 2000) cuyas conclusiones fueron que los problemas actuales de matemáticas que aparecían en los libros de texto no fomentaban en los estudiantes una disposición genuina o auténtica para aplicar las matemáticas a la realidad. El modelo de resolución de estos problemas, modelo tradicional o superficial, se basaba en la ejecución rutinaria de una o más operaciones aritméticas utilizando únicamente los datos que aparecían en el enunciado del problema, sin tener ninguna consideración acerca de las limitaciones o restricciones que ofrecía el contexto del problema.

Un claro ejemplo de esta no consideración del contexto del problema fue la prueba realizada por el grupo de investigación IREM de Grenoble, y por Radatz a principios de los 80' quienes propusieron el siguiente problema "absurdo" a alumnos de escuela elemental:

"Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco.
¿Cuántos años tiene el capitán del barco?"

(IREM de Grenoble, 1980; y Radatz, 1983, citado en Verschaffel *et al*., 2000)

En ambos estudios muchos alumnos operaron con los datos del problema sin percatarse de la incoherencia del mismo. No sólo eso; Radatz (1983) descubrió que el número de alumnos que intentaban hallar la solución de este problema operando con los datos ofrecidos aumentaba con la edad (desde un 10% en primer curso hasta casi un 60% en tercer y cuarto curso).

Esta prueba evidenció una clara tendencia por parte de los alumnos a excluir consideraciones o factores realistas en la resolución de problemas, limitándose a operar sistemáticamente con los datos del problema. Todo ello fruto del Modelo Superficial de resolución de problemas que critica Verschaffel, proponiendo un modelo realista: el Modelo Genuino (*Genuine approach*).

3.1.2. SUSTITUCIÓN DEL MODELO SUPERFICIAL POR EL MODELO GENUINO

Verschaffel representa por medio del siguiente esquema el Modelo Superficial o Modelo Tradicional de resolución de problemas de matemáticas:

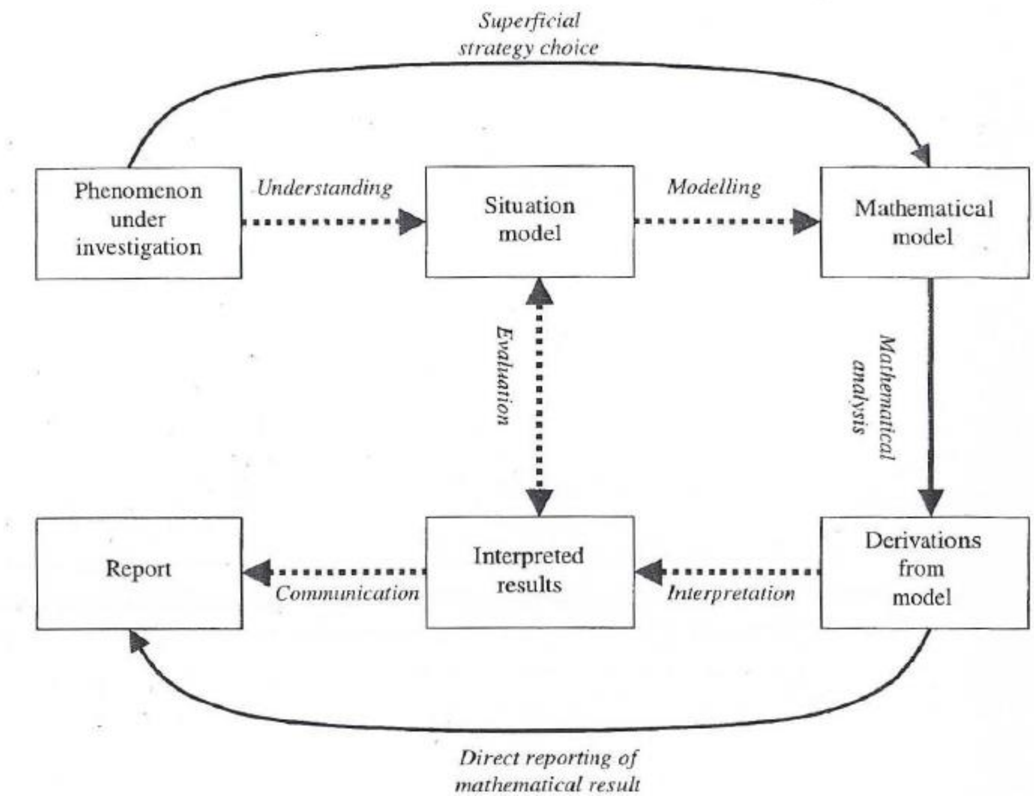


Figura II: Esquema del Modelo Superficial o Modelo Tradicional de resolución de problemas (encontrado en Verschaffel *et al*., 2000, p. 97).

Como se puede apreciar en el esquema, aparece un salto desde el entendimiento del fenómeno o situación a resolver *(Phenomenon under investigation)* hasta la identificación de la estructura matemática del problema *(Mathematical model)*, saltándose la interpretación situacional *(Situation model)*. También encontramos otro salto desde la fase de aplicación de la operación matemática *(Derivations from model)* hasta la emisión de la solución del problema *(Report)* sin tener en cuenta la interpretación del resultado obtenido *(interpreted results)* y si se ajusta a la realidad del problema o no *(Evaluation)*. No se tiene en cuenta el contexto o realidad del problema.

Este modelo o proceso de resolución puede inducir a error en problemas donde el contexto resulta relevante como los ejemplos del "problema del corredor" o el "problema de la edad del capitán del barco" propuesto por el IREM de Grenoble y Radatz, mencionados con anterioridad.

Por otro lado, como se mostró al principio de este apartado, Verschaffel aboga por el Modelo Genuino (*Genuine Approach*) o Modelo Situacional. Un proceso o modelo en el que se tienen en cuenta ese nexo entre autenticidad-realidad y planteamiento matemático.

En la estructura del Modelo Genuino, a diferencia del Modelo Superficial, hay una primera fase de entendimiento *(understanding)* sobre la situación que se plantea en el problema a fin de seleccionar la información que sea relevante para resolver el problema. En esta primera fase se precisa de conocimientos previos sobre la situación propuesta, si se precisa, *(situation model).* En el caso del “problema del corredor”, mencionado al principio de este apartado, sería saber que el cansancio impide mantener una velocidad constante en distancias mayores.

En la siguiente fase, el problema es analizado desde el punto de vista matemático *(mathematical model)*, es decir, buscando la operación matemática que más se ajuste a la solución requerida. En el caso de “el problema del corredor” sería la regla de proporción directa.

Posteriormente, se deberá interpretar los resultados obtenidos en relación a la situación del problema planteado *(interpreted results).* En caso de no ser coherentes, se deberá reajustar el modelo matemático elegido u optar por otro proceso de resolución. En el caso de nuestro problema, no habría una respuesta real a la cuestión planteada ya que nuestra solución de “si recorre 100m en 10’5s, recorrerá 400m en 42s no se adapta a la realidad de la situación planteada.

La última fase de este modelo de resolución *(Report)* sería la de emitir una solución como respuesta a la cuestión planteada en el problema. En el caso de “el problema del corredor” sería conveniente argumentar que no hay solución exacta posible ya que es imposible que nuestro corredor, siendo humano, consiga mantener una velocidad constante sin que el cansancio le pasara factura.

3.1.3. CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS EN FUNCIÓN DE SU GRADO DE AUTENTICIDAD

A pesar de que el Modelo Genuino es más apropiado que el Modelo Superficial en lo que a relación entre problemas de matemáticas y realidad se refiere, la realidad en el aula es muy distinta. Según algunas investigaciones como las de Reusser y Stebler (1997), (citada en Verschaffel *et al*. (2000), p.100) concluyeron que solo unos pocos problemas de matemáticas que son empleados en el aula invitan o desafían al alumno a activar y usar su conocimiento previo y experiencia como propone el Modelo Genuino de Verschaffel. Siguiendo con sus resultados obtenidos, el modelo de resolución que se propone en la amplia mayoría de problemas es el Modelo Superficial o Modelo Tradicional, tratando de enfocar la atención del alumno en los datos que aparecen en el problema y en la operación a realizar, fomentando una rutina a la hora de resolver problemas de matemáticas.

Como consecuencia de esto último, ¿qué es lo que se debe hacer para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria, en nuestro caso? o ¿qué medidas se deberán llevar a cabo para que esta situación cambie?

Este asunto podría traer controversia ya que si los problemas de matemáticas que aparecen en los libros de texto no cumplen con su fin de simular situaciones de la vida real, el alumno no percibirá los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela como útiles para aplicarlos en situaciones reales del día a día. Ante esta problemática, la solución que proponen muchos investigadores es la de identificar aquellos problemas de matemáticas que no tienen en cuenta la realidad que rodea al niño y reescribirlos de forma que sean más auténticos.

Con el fin de identificar aquellos problemas auténticos, que se ajustan a la realidad, de aquellos absurdos, que no se adaptan al contexto real, Galbraith y Stillman (2001), (citado en Verschaffel *et al*. (2000), p. 104) propusieron una clasificación de los problemas de matemáticas en función de su relación con el mundo real, es decir, de su grado de autenticidad.

Los problemas fueron clasificados en cuatro categorías principales:

- **Problemas absurdos *(lnjudicious problems):*** Serían aquellos problemas que carecen de sentido o lógica. No se ajustan a la realidad. Dentro de esta categoría podríamos ubicar el "problema de la edad del capitán del barco" propuesto por el IREM de Grenoble (1980) y Radatz (1983).
- **Problemas de recipiente vacío *(Context-separable problems):*** En este grupo estarían los problemas cuya parte situacional es irrelevante, teniendo como objetivo identificar, únicamente la estructura matemática del problema. Estos son los problemas propios del Modelo Superficial o Modelo Tradicional de resolución de problemas.
- **Problemas estándar *(Standard application problems):*** Serían aquellos problemas cuyo contexto trata de aproximarse a la realidad, pero el proceso de resolución es estándar, es decir, en el enunciado únicamente aparecen los datos o información necesaria para resolver el problema. No tienen en cuenta la experiencia o los conocimientos previos del alumno. En este grupo estarían la mayoría de los problemas que podemos encontrar en los libros de matemáticas.
- **Problemas auténticos *(Genuine modelling problems):*** Serían aquellos problemas que el alumno podría encontrarse normalmente en su día a día. Tienen en cuenta el contexto real del alumno, describiendo lo más fielmente situaciones reales que el alumno podría encontrarse fuera de la escuela.

Galbraith y Stillman (2001) tras su estudio, llegaron a la conclusión de que: "los problemas absurdos *(lnjudicious problems)* deberían ser eliminados por ser carentes de sentido y no ajustarse a la realidad.

En cuanto a los problemas de recipiente vacío *(Context-separable problems)*, pese a no ajustarse a la realidad, tienen un rol importante en la enseñanza de las matemáticas ya que permite al alumno desarrollar una destreza a la hora de saber aplicar operaciones de matemáticas.

Por último, en relación a los problemas estándar *(Standard application problems)* y auténticos *(Genuine modelling problems)*, éstos se adaptan, en menor o mayor medida, al contexto del alumno, existiendo un nexo claro entre las matemáticas y su aplicación en situaciones reales cotidianas. " (Galbraith y Stillman, 2001, citado en Verschaffel *et al.* 2000, pp. 104-105)

Para finalizar, una vez conocidas las medidas a llevar a cabo para lograr implantar el Modelo Genuino en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿cómo sabremos que estas medidas serán las correctas y que el modelo genuino que propone Verschaffel dará resultado?

Investigadores como Depaepe trataron de llevar a la práctica el modelo teórico de Verschaffel con el fin de analizar el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas. En el siguiente punto dicho estudio será analizado. La investigación que llevó a cabo Verschaffel y el estudio realizado por Depaepe servirán de base para realizar mi análisis sobre la influencia del grado de autenticidad y nivel de dificultad cognitiva de los problemas en la enseñanza y resolución de los problemas de matemáticas en nuestro país.

3.2. ESTUDIOS PREVIOS SOBRE EL GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Como se ha venido mostrando en este trabajo, es importante hacer ver a los estudiantes un sentido de utilidad de las matemáticas. De tal forma que puedan aplicar sus conocimientos matemáticos en situaciones cotidianas, existiendo un nexo entre matemáticas y realidad.

Una vez visto el modelo de resolución de problemas que proponía Verschaffel, Modelo Genuino, muchos investigadores trataron de llevar sus ideas a la práctica, con el fin de demostrar si problemas de matemáticas más próximos a la realidad repercutirían de manera positiva en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en lo que a resolución de problemas se refiere.

Según algunos investigadores "los alumnos, durante las últimas décadas, no ven un nexo claro entre las matemáticas que dan en la escuela con su aplicación a problemas reales, con el riesgo que esto conlleva. Este gran problema hace que los alumnos pierdan el interés por esta materia al no ver una utilidad clara en situaciones de la vida real. Como consecuencia, esto implica para los alumnos una mayor dificultad para resolver situaciones en las que se requiera dar un punto de vista o tener en cuenta conocimientos previos o la propia experiencia." (Greer, 1993; Verschaffel, De corte y Lasure, 1994, citado en Depaepe *et al*. 2009). La justificación a esto último es que han sido enseñados, a lo largo de su etapa escolar, a resolver problemas de una forma rutinaria y puramente matemática, Modelo Superficial, sin tener en cuenta otros factores como los mencionados anteriormente.

Por todo ello, se deberá incluir mayor cantidad de problemas en los libros de texto que requieran de un Modelo Situacional (Modelo Genuino) para ser resueltos en lugar de problemas en los que al alumno le baste con identificar su estructura matemática, siendo resueltos aplicando, únicamente, el modelo Tradicional o Modelo Superficial. De esta manera, los alumnos serán capaces de enfrentarse a una variedad más amplia de problemas.

Algunos autores, con sus investigaciones, han intentado fijar criterios que nos permitan caracterizar o identificar el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas. En el año 2002, Palm (citado en Depaepe *et al*. 2009) desarrolló una categorización de los criterios o variables que se deberían tener en cuenta para considerar un problema de matemáticas como auténtico.

Años más tarde, en 2004, Palm junto con Burman (citado en Depaepe *et al*. 2009) aplicaron, en Finlandia y Suecia, respectivamente, estos criterios o variables para analizar el realismo de los problemas de matemáticas. Estos criterios eran: "evento del problema", "realismo de los datos del problema", "lenguaje usado", "guía o apoyo", "existencia de los datos" y "requerimientos de resolución". Fien Depaepe en 2009 seleccionó los criterios más relevantes para estudiar el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas de los libros de texto en Flandes.

Inspirado por el trabajo de Palm y Burman (2004), (citado en Depaepe *et al*. 2009), Depaepe, De Corte y Verschaffel (2009) diseñaron un estudio en el que investigaron la naturaleza de los problemas en lo que a grado de autenticidad se refería. El estudio se llevó a cabo en Flandes y la muestra fueron dos clases de sexto curso de enseñanza elemental.

3.2.1. ESTUDIO DE F. DEPAEPE, E. DE CORTE Y L. VERSCHAFFEL

Para llevar a cabo su análisis sobre el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas, Depaepe *et al* (2009), analizaron el libro de matemáticas “Eurobasis” (Boone, D’haveloose, Muylle, y Van Maele, n.d.). El criterio de selección de este libro fue su uso frecuente y gran extensión en los colegios de los Países Bajos. En total se analizaron 228 problemas de matemáticas.

En cuanto a la metodología utilizada para analizar dichos problemas. Estos investigadores siguieron los criterios elaborados por Palm y Burman (2004), (citado en Depaepe *et al.* 2009). A su vez, clasificaron cada criterio en dos niveles para facilitar el análisis de los problemas, puntuando cada variable de manera dicotómica (1 ó 0). Así pues, cuando se cumplía un criterio dentro de cada problema, esta variable se puntuaba con “1”. Por otro lado, cuando no se cumplía el criterio, la variable se puntuaba con “0”.

Sin embargo para la variable “especifidad de los datos” se distinguieron tres niveles puntuados con 2, 1 ó 0 en función de si cumplían con dicho criterio en mayor o menor medida, respectivamente. Este marco con todas las variables para valorar el grado de autenticidad de cada problema aparece en el Anexo II de este trabajo *(ver Tabla I: Variables para analizar el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas, en Anexo II: Marco Teórico).*

Una vez realizada la prueba, los resultados obtenidos por Depaepe *et al.* (2009), en función de cada variable, fueron los siguientes:

Evento *(event)*: Casi todos los problemas analizados en el libro de texto (95%) se referían a eventos que podrían, en principio, ser encontrados en situaciones de la vida real fuera del colegio.

Pregunta *(question)*: En alrededor del 30% de los problemas analizados, la pregunta del problema sería difícilmente planteada por el alumno fuera de la escuela.

Propósito del problema *(purpose)*: Los problemas en los que no existía un propósito claro alcanzaban el 85%.

Existencia de datos *(Existence of data)*: Únicamente en el 13% de los problemas analizados, los datos relevantes del problema eran diferentes a los datos encontrados en la situación simulada.

Realismo de los datos *(Realism of data)*: En todos los problemas analizados, a excepción de uno, los datos ofrecidos eran iguales o muy similares a los datos o valores encontrados en la vida real.

Especificidad de los datos *(Specificity of data)*: En tan solo un 3% de los problemas analizados, la situación planteada no era específica. La mayoría de los problemas fueron puntuados con "1" ya que aparentemente la situación descrita era específica.

Uso del lenguaje *(Language use)*: No se encontraron ejemplos claros en los que la terminología usada en los enunciados de los problemas fuera demasiado compleja como para dificultar su comprensión.

Disponibilidad de estrategias resolutivas *(Availability of solutions strategies)*: En alrededor del 10% de los problemas la estrategia de resolución propuesta por el libro de texto para resolver un determinado problema no se correspondía con la estrategia que normalmente se emplearía en una situación similar en la vida real.

Herramientas externas *(External tools)*: En menos de la mitad de los problemas analizados (39%) se especificaba el uso de herramientas externas como calculadora, gráfica o tabla de valores para resolver los problemas. A su vez, estas mismas herramientas serían las utilizadas en la vida real.

Guía *(Guidance)*: En más de la mayoría de los problemas analizados (69%) la guía o ayuda ofrecida en los libros de texto para resolver el problema no se correspondía a la ayuda que el alumno dispondría para resolver esa situación en la vida real.

Requerimientos de resolución *(Solution requirements)*: En casi la totalidad de los problemas, los requerimientos, tanto implícitos como explícitos, para resolver la tarea, eran similares a la situación de la vida real correspondiente.

3.2.2. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR DEPAEPE *ET AL.*

Una vez obtenidos los resultados, las conclusiones a las que llegaron Depaepe *et al.* (2009) fueron que la mayoría de los problemas analizados simulaban relativamente bien las situaciones con las que se pudiera encontrar el alumno fuera de la escuela. A su vez, los valores o datos del problema se adaptaban casi en su totalidad a los valores que se encuentran en la vida real. El lenguaje usado en los enunciados del texto era el adecuado y por lo tanto no afectaba a la comprensión del problema. Por último, las estrategias resolutivas que proponía el libro de texto eran, en su mayoría, iguales a las que el alumno emplearía fuera de la escuela.

Sin embargo, por otro lado, los resultados obtenidos sirvieron para sacar conclusiones no tan alentadoras como las anteriores. No existía una especificidad en los datos del problema. Elementos del contexto del problema como sujeto, objeto o lugar no estaban definidos. En la mayoría de los problemas analizados no existía un propósito claro por lo tanto el interés estaba puesto en la estructura matemática del problema en lugar de en la parte situacional. Además, en muchos casos, la cuestión a resolver en el problema no simulaba la pregunta que un alumno podría realizarse en relación a la situación planteada. Finalmente la guía o ayuda ofrecida por el libro de texto era superior a la que el alumno se encontraría en la vida real. Esto implica que en muchos problemas había pistas que ayudaban al alumno a resolver el problema, haciendo que éste resultara más fácil y, por lo tanto, no favoreciendo un desafío cognitivo mayor para el alumno.

En resumen, los resultados no fueron muy alentadores, ya que más de la mayoría de los problemas analizados no cumplían con los criterios anteriores como para considerar a estos problemas como auténticos. De tal forma que la investigación de Depaepe *et al.* (2009) demostró la no relación entre los problemas de matemáticas de los libros de texto con la realidad y, por consiguiente, los problemas de matemáticas no simulaban situaciones de la vida real.

La solución que propusieron Depaepe *et al.* (2009), para resolver este problema, fue que si de verdad se pretende que los alumnos lleguen a ser competentes a la hora de resolver problemas en la vida real, donde se precise el uso de las matemáticas, será preciso traer esas situaciones reales al currículo de matemáticas. Para ello se deberá modificar los enunciados de los problemas de matemáticas, es decir, reescribirlos para hacerlos más reales y auténticos. De esta forma se conseguirá que los alumnos consigan aplicar de una forma eficaz las matemáticas de la escuela a situaciones reales de su día a día, creando un nexo claro entre problemas de matemáticas y realidad.

4. ANÁLISIS DEL NIVEL DE DIFICULTAD COGNITIVA Y GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Tras haber analizado los últimos resultados del informe TIMSS, queda demostrado que los alumnos españoles muestran un bajo rendimiento en matemáticas. A fin de conseguir identificar la causa de tan pobres resultados, centrándome en este análisis únicamente en lo que a enseñanza y resolución de problemas de matemáticas se refiere, partiré de las hipótesis de que tan pobres resultados pueden ser debidos a que en los libros de texto haya, por un lado, un elevado número de problemas consistentes y, por lo tanto de una dificultad cognitiva baja, y, por otro lado, poca cantidad de problemas auténticos.

La resolución de problemas de matemáticas es fundamental dentro de la escolaridad elemental, ya que permite desarrollar en los alumnos las habilidades necesarias para aplicar a situaciones de la vida real los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela, de ahí su importancia y complejidad.

En relación a esto último, la tarea de resolver problemas de matemáticas ya ha sido estudiada y tratada de forma minuciosa desde el ámbito de la psicología cognitiva. Muestra de ello es el modelo teórico de Verschaffel (2000), el cual ha sido desarrollado en este trabajo, que aboga por un modelo de resolución de problemas, Modelo Genuino, que tenga en cuenta el contexto del problema y, no solo, su estructura matemática. También cabe mencionar, en lo que a análisis de problemas se refiere, el estudio realizado por Depaepe et al. (2009), anteriormente mencionado, enfocado en comprobar el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas de los libros de texto. Ambos estudios concluyeron que en el aula de matemáticas no se estaba cumpliendo con ese grado de autenticidad, proponiendo una reescritura de los problemas de matemáticas que permitiera que estos problemas fueran más auténticos. Cuanto menor sea la distancia entre la realidad y los problemas de matemáticas, mejores resultados obtendrán los alumnos.

Teniendo en cuenta esta justificación teórica, el objetivo de este mi estudio será analizar los problemas de matemáticas de los libros de texto españoles. Para ello analizaré los problemas a través de dos vertientes: dificultad cognitiva y grado de autenticidad.

4.1. DIFICULTAD COGNITIVA DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

En cuanto a la dificultad cognitiva, los problemas aritméticos pueden clasificarse en función de su estructura matemática. Según Heller y Greeno (1978) (citado en Vicente, Orrantia, y Verschaffel, 2008), todos los problemas aritméticos que siguen una estructura aditiva pueden ser agrupados en tres categorías:

Problemas de cambio: aquellos en los que se parte de una cantidad inicial que experimenta un cambio (añadir o quitar), dando lugar a una cantidad final.

Problemas de combinación: aquellos en los que se parte de dos conjuntos diferentes que se combinan entre sí para obtener una cantidad final o conjunto final.

Problemas de comparación: aquellos en los que se compara una cantidad con otra, de tal forma que surge otra cantidad o conjunto, el conjunto diferencia.

Algunos autores añaden un cuarto tipo de problema, problemas de igualación. Estos problemas serían similares a los problemas de comparación aunque, en esta ocasión, el conjunto diferencia hace referencia a la cantidad que habría que añadir o quitar a uno de las cantidades para que ésta fuera igual a la segunda.

En función del conjunto que no se conoce y de los términos de "añadir o quitar" (aditivos o sustractivos, respectivamente) en los que esté formulado el problema, estas categorías podrían desglosarse en los siguientes tipos de problemas que aparecen en la Tabla IV en el Anexo III de este trabajo *(ver Tabla IV: Tipos de problemas según su estructura matemática, en Anexo III: Análisis del nivel de dificultad cognitiva y grado de autenticidad de los problemas de matemáticas).*

Asimismo, estos tipos de problemas pueden clasificarse, en "problemas consistentes e inconsistentes" (Lewis y Mayer, 1987, citado en Vicente *et al.*, 2008).Por un lado, los problemas consistentes son aquellos en los que la estructura superficial del problema es igual que la operación a realizar para resolver el problema (si aparece el término "más" o "ganar" hay que sumar). Por ejemplo, si nos centramos en los problemas de cambio *(ver Tabla IV, en Anexo III*), los problemas de CA1, CA2 y CA4 serían consistentes, véase los ejemplos de la tabla IV en Anexo III, ya que cuando aparece el término "ganar" o "perder" hay que sumar o restar, respectivamente, para resolver el problema. De esta forma, los problemas consistentes son más fáciles, desde el punto de vista cognitivo, de resolver ya que el alumno podría servirse de estas pistas textuales ("ganar" o "perder") para saber la operación que debe emplear para resolver el problema, sin necesidad de comprender el enunciado del texto en su totalidad.

Por otro lado, los problemas inconsistentes son aquellos en los que la estructura superficial del problema no coincide con la operación a realizar (si aparece el término "ganar" no hay que sumar). Por ejemplo, centrándonos igualmente en los problemas de cambio, los problemas de CA3, CA5 y CA6 serían inconsistentes, *(véase los ejemplos de la tabla IV, en Anexo III)*, ya que, en esta ocasión, cuando aparece el término "ganar" o "perder" hay que hacer la operación inversa, restar o sumar, respectivamente, para resolver el problema. Por eso, los problemas inconsistentes son más difíciles, cognitivamente hablando, de resolver ya que el alumno tiene que entender muy bien el enunciado para saber la operación que debe emplear para resolver el problema.

También en los libros de texto de matemáticas, especialmente en los primeros años de Educación Primaria, podemos encontrar problemas que siguen una estructura multiplicativa de grupos iguales. Los cuales podrían interpretarse como problemas de suma repetitiva. Un ejemplo de estos problemas sería:

"En la habitación de Manuel hay 3 estanterías. En cada estantería hay 5 libros. ¿Cuántos libros tiene Manuel?"

4.2. GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Una vez visto el primer aspecto que se ha tenido en cuenta para analizar los problemas de matemáticas, dificultad cognitiva, la segunda vertiente será, siguiendo el estudio de Depaepe *et al*. (2009), analizar el grado de autenticidad que aparece en los problemas de matemáticas de los libros de texto.

Para realizar este análisis he elegido los libros de matemáticas "Matemáticas 1" y "Matemáticas 2" de Editorial Anaya (Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G., 2007) para primero y segundo de Educación Primaria, respectivamente. La razón de esta elección fue que esta editorial es una de las más conocidas, siendo uno de los mayores referentes en lo que a libros de texto y materiales educativos se refiere en nuestra comunidad. La decisión de enfocar mi análisis en el primer ciclo de Educación Primaria fue debida a que son en estos primeros años cuando los alumnos comienzan a familiarizarse con la enseñanza y resolución de problemas. Además la posterior propuesta de mejora, que se realizará una vez valorados los resultados de mi análisis como su posterior puesta en práctica también irán dirigidas a alumnos de primer ciclo ya que considero que, para que las soluciones que proponga sean eficaces, éstas deberán ser llevadas a cabo desde los primeros años de Educación Primaria.

Para analizar el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas he utilizado las mismas variables que utilizó Depaepe *et al*. (2009) en su estudio con algunas pequeñas modificaciones. A diferencia del estudio de Depaepe *et al.* (2009), que puntuaban las variables de forma dicotómica (1/0, excepto en la variable de "especificidad de los datos"), he decidido considerar tres valores para cada una de las variables. He puntuado con un "1" aquellos aspectos que reproducirían una situación real, es decir, auténtica, tal y como se la encontraría el alumno fuera de la escuela. Con "0,5" he puntuado aquellos aspectos que podrían llegar a producirse en la realidad pero de forma limitada. Por último, he valorado con un "0" aquellos aspectos que el alumno difícilmente se encontraría en la vida real, es decir, no tienen en cuenta el contexto del alumno.

Además, para mi análisis, he decidido modificar la variable "herramientas externas" *(external tools)* por "ayudas gráficas o visuales". El porqué reside en que en estas edades, 1º y 2º de Educación Primaria, las ayudas para resolver los problemas de matemáticas se basan en dibujos o esquemas que ayuden al alumno a visualizar o representar la situación que plantea el problema, en lugar del uso de calculadora o gráficos para resolverlo, cómo definía Depaepe *et al*. (2009) con el uso de esta variable de "herramientas externas". Salvo esta modificación, el resto de las variables que he utilizado en mi análisis son las mismas que las que tuvo en cuenta Depaepe *et al.* (2009) para realizar su estudio.

Los aspectos o variables que se tuvieron en cuenta para analizar los problemas de matemáticas son los que aparecen en la Tabla V del Anexo III de este trabajo *(ver Tabla V: Marco teórico para el análisis del grado de autenticidad de los problemas de matemáticas, en Anexo III: Análisis del nivel de dificultad cognitiva y grado de autenticidad de los problemas de matemáticas)*

Asimismo, seguido de la Tabla V del Anexo III está incluido el análisis de dos problemas (un problema extraído del libro de primero y un problema, del libro de segundo de Educación Primaria) como muestra del procedimiento llevado a cabo en este trabajo *(ver tablas VI y VII: Análisis del nivel de dificultad cognitiva y grado de autenticidad de un problema de matemáticas en 1º y 2º de E. Primaria, en Anexo III: Análisis del nivel de dificultad cognitiva y grado de autenticidad de los problemas de matemáticas).*

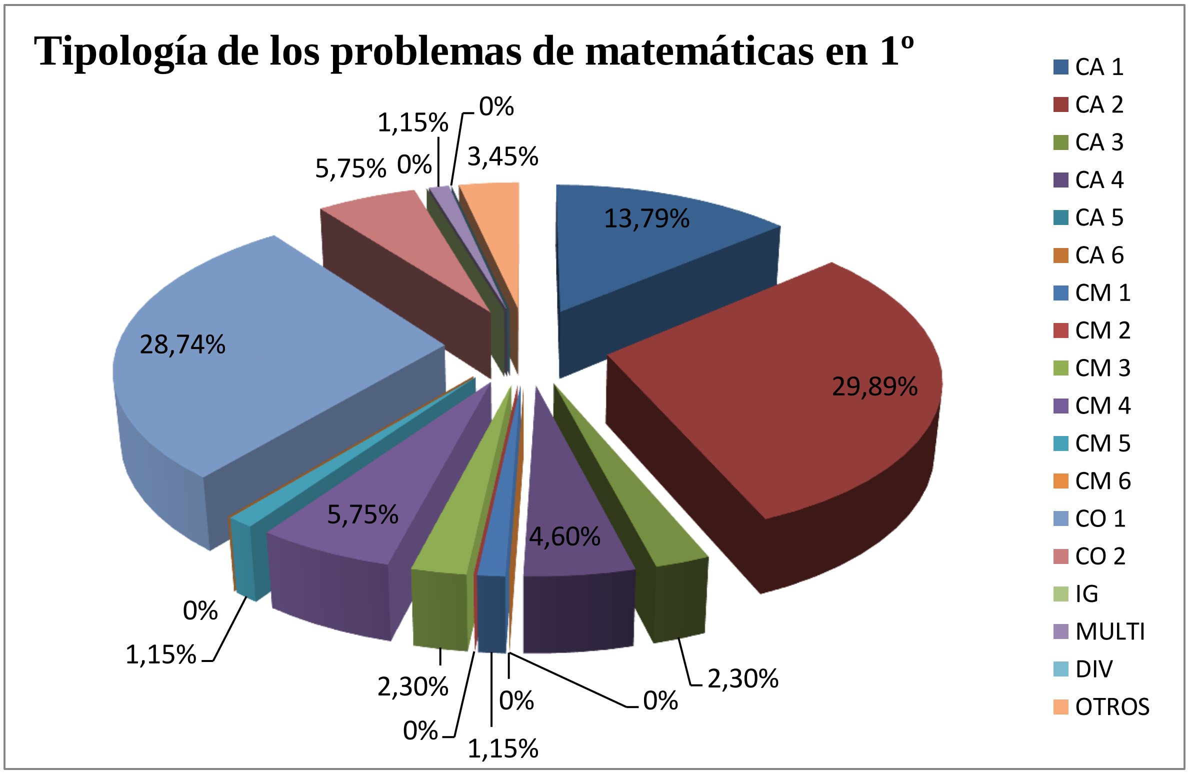
4.3. RESULTADOS OBTENIDOS TRAS EL ANÁLISIS

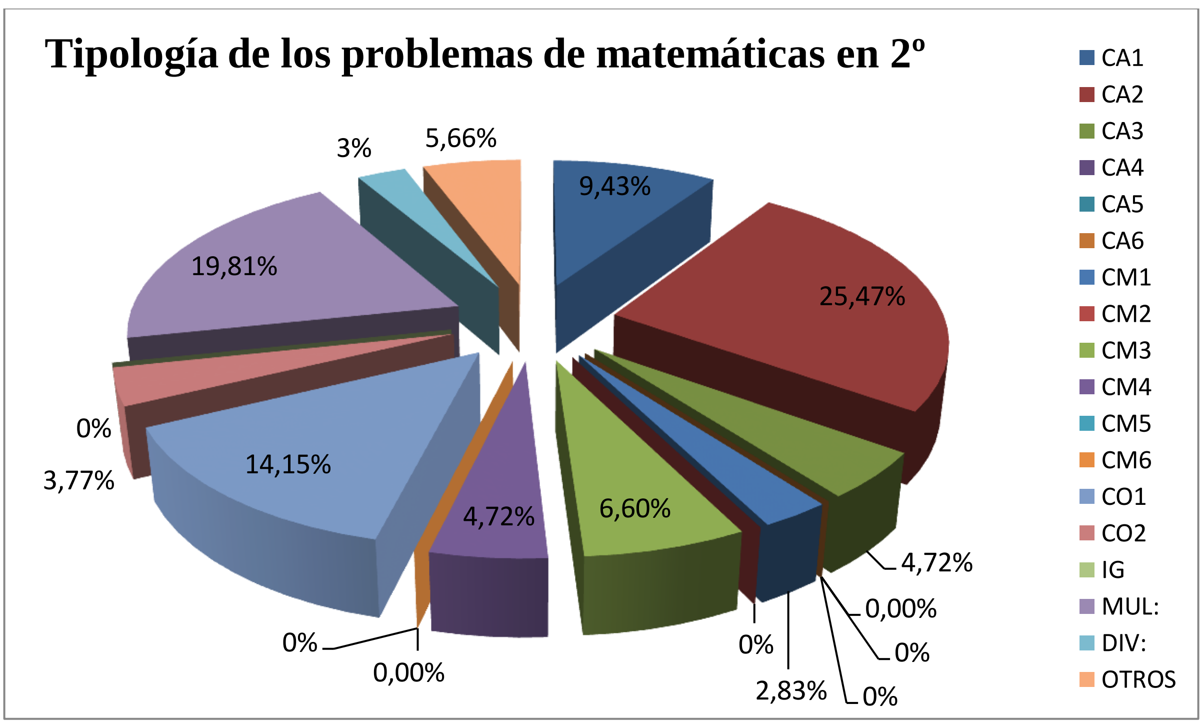
Para facilitar la interpretación y análisis de los resultados obtenidos, los resultados han sido divididos por cursos (primero y segundo de Primaria). De esta forma se podrá realizar una comparativa que permita ver diferencias apreciables entre ambos cursos. Algunos de los problemas presentaban dos operaciones a realizar, por eso el número de tipologías de estructuras matemáticas de los problemas es mayor que el número total de problemas.

En primer lugar aparecerá una tabla con los resultados relacionados con la tipología de los problemas y, por lo tanto, su nivel de dificultad cognitiva. Esta tabla irá acompañada de dos diagramas de sectores para ver la distribución de la tipología de problemas en ambos cursos. Posteriormente se contemplarán los resultados relacionados con el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas analizados. Tras analizar 83 problemas en 1º y 94 problemas de matemáticas en 2º. Los resultados fueron:

TIPOLOGÍA DEL PROBLEMA	**RESULTADOS EN 1º**		**RESULTADOS EN 2º**	
	Nº DE PROBLEMAS	**PORCENTAJE**	**Nº DE PROBLEMAS**	**PORCENTAJE**
CAMBIO 1	12	13,79%	10	9,43%
CAMBIO 2	26	29,89%	27	25,47%
CAMBIO 3	2	2,30%	5	4,72%
CAMBIO 4	4	4,60%	0	0,00%
CAMBIO 5	0	0%	0	0%
CAMBIO 6	0	0%	0	0%
COMPARACIÓN 1	1	1,15%	3	2,83%
COMPARACIÓN 2	0	0%	0	0%
COMPARACIÓN 3	2	2,30%	7	6,60%
COMPARACIÓN 4	5	5,75%	5	4,72%
COMPARACIÓN 5	1	1,15%	0	0,00%
COMPARACIÓN 6	0	0%	0	0%
COMBINACIÓN 1	25	28,74%	15	14,15%
COMBINACIÓN 2	5	5,75%	4	3,77%
IGUALACIÓN	0	0%	0	0%
MULTI: GR. IGUALES	1	1,15%	21	19,81%
DIVISIÓN: GR. IGUALES	0	0%	3	3%
OTROS	3	3,45%	6	5,66%
TOTAL	87	100%	106	100%

Tabla VIII: Tipología de los problemas de matemáticas analizados en 1º y 2º





Figuras VII y VIII: Distribución de los tipos de problemas de matemáticas en los libros de texto de 1º y 2º de E. Primaria.

GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS ANALIZADOS				
ASPECTO O VARIABLE	PROBLEMAS ANALIZADOS EN 1º		PROBLEMAS ANALIZADOS EN 2º	
	PUNTUACIÓN	PORCENTAJE	PUNTUACIÓN	PORCENTAJE
EVENTO	79	95,18%	80	85,11%
PREGUNTA	74,5	89,76%	68	72,34%
PROPÓSITO DEL PROBLEMA	14	16,87%	26	27,66%
EXISTENCIA DE LOS DATOS	77	92,77%	74,5	79,26%
REALISMO DE LOS DATOS	67	80,72%	64,5	68,62%
ESPECIFICIDAD DE LOS DATOS	61	73,49%	82	87,23%
USO DEL LENGUAJE	63	75,90%	87	92,55%
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN	56,5	68,07%	89	94,68%
AYUDAS GRÁFICAS O VISUALES	42	50,60%	18	19,15%
GUÍA	51,5	62,05%	84,5	89,89%
REQUERIMIENTOS DE RESOLUCIÓN	71	85,54%	86	91,49%
TOTAL	**83**		**94**	

Tabla IX: Grado de autenticidad de los problemas de matemáticas analizados

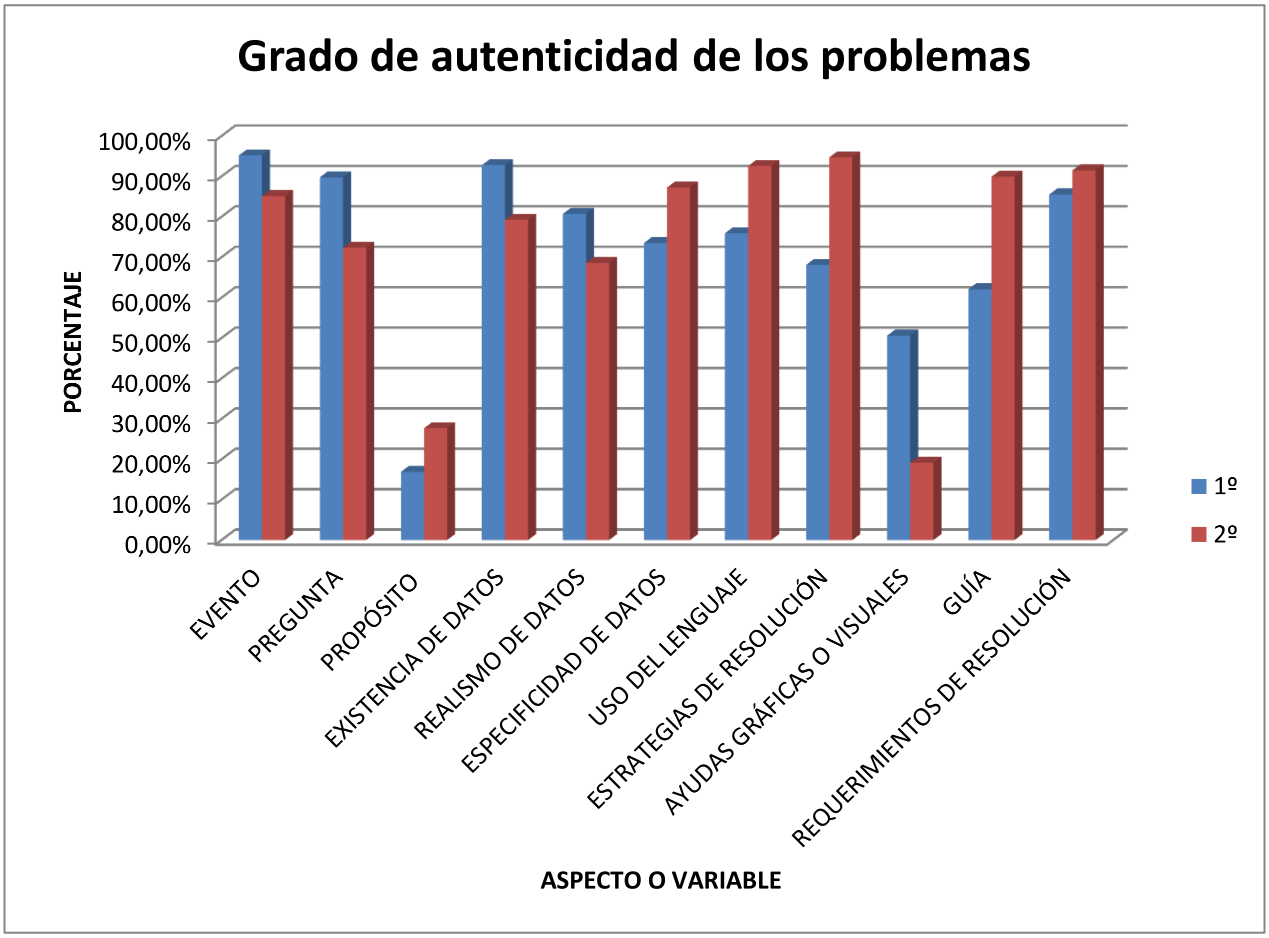


Figura IX: Comparativa por cursos del grado de autenticidad, por porcentajes, de los problemas analizados.

4.4. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Las hipótesis de las que se partía antes de realizar este análisis se cumplieron en ambas vertientes: dificultad cognitiva de los problemas y grado de autenticidad de los problemas de matemáticas.

TIPOLOGÍA DE LOS PROBLEMAS EN CUANTO A SU ESTRUCTURA MATEMÁTICA:

Si interpretamos los resultados obtenidos en cuanto a la tipología de los problemas analizados, observaremos a simple vista el predominio de los problemas de CAMBIO 2 (29,89% y 25,47%, respectivamente en 1º y 2º) y COMBINACIÓN 1 (28,74% y 14,15%) en ambos cursos. Ambos problemas son consistentes y, por lo tanto, presentan escasa dificultad cognitiva para el alumno. En tercer lugar y siguiendo con los problemas de estructura aditiva, la tipología de problema más repetida es la de CAMBIO 1 (13,79% y 9,43%, respectivamente en 1º y 2º). Éste último tipo de problema, al igual que los dos anteriores, es consistente y de baja dificultad cognitiva para el alumno. Llama la atención que estas tres tipologías de problema ocupen más del 70% de los problemas de matemáticas en 1º de E.P. (72,42%) y aproximadamente la mitad de los problemas en 2º (49,05%). Dato que demuestra la poca dificultad cognitiva de los problemas de matemáticas que aparecen en los libros de texto.

Por otro lado, si analizamos el número de problemas inconsistentes y, por lo tanto, que presentan una mayor dificultad cognitiva para el alumno (CAMBIO 5 y CAMBIO 6) sorprende que no aparezca ningún problema de estos tipos en ambos libros de texto. Algo que habla de la monotonía en cuanto a la estructura de los problemas de matemáticas que deben resolver los niños y del escaso nivel de dificultad que presentan estos problemas para el alumno.

Por último, los problemas de COMPARACIÓN alcanzan solo el 10,35% y el 14,15% en 1º y 2º, respectivamente. En ambos cursos no aparece ningún problema de IGUALACIÓN. Finalmente el 3,45% y 5,66% se corresponde, respectivamente en 1º y 2º, a problemas no relacionados con las estructuras anteriormente mencionadas.

GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS

En función de las diferentes variables o aspectos de autenticidad tenidos en cuenta, se puede interpretar que:

Evento: Casi en su totalidad, 95,18%, los problemas analizados en 1º estaban relacionados con eventos o situaciones las cuales el alumno podría encontrarse fuera de la escuela. Este porcentaje decrece en los problemas de 2º con un 85,11%.

Pregunta: El 89,76% de las cuestiones planteadas en los problemas de matemáticas de los libros de 1º serían similares a las formuladas por un alumno de esta edad. De nuevo, el porcentaje desciende al analizar los problemas de 2º con un 72,34%.

Propósito del problema: Tan solo el 16,87% de los problemas analizados en 1º tenían, tanto explícita como implícitamente, un propósito claro para ser resuelto. Este porcentaje aumenta ligeramente en los problemas de 2º analizados, 27,66%.

Existencia de los datos: En más del 90% de los problemas analizados en 1º, 92,77%, los datos del enunciado serían accesibles para el alumno en situaciones similares fuera de la escuela. Este porcentaje decrece en los problemas de 2º, 79,26%.

Realismo de los datos: El 80,72% de los problemas analizados en 1º presentan cifras o valores muy próximos a los reales. Este realismo decrece en 2º con un 68,62%

Especificidad de los datos: En el 73,49% de los problemas de 1º, la situación que se plantea es específica, es decir, sujeto, objeto y lugar están definidos en el problema. Esta especificidad aumenta en los problemas de 2º, 87,23%.

Uso del lenguaje: En el 75,90% de los problemas analizados no se aprecia posibles problemas de comprensión relacionados con el enunciado. Porcentaje que incrementa considerablemente en 2º, alcanzando el 92,55%.

Estrategias de resolución: En el 68,07% de los problemas de 1º, las estrategias resolutivas ofrecidas por el libro se aproximaban a las empleadas por el alumno fuera de la escuela. Esta similitud aumenta de forma considerable en 2º, alcanzando el 94,68%.

Ayudas gráficas o visuales: En aproximadamente la mitad de los problemas (50,60%), los dibujos o esquemas que acompañan al enunciado del problema ayudan a su entendimiento. En el resto, los dibujos, o bien, no se corresponden con el enunciado, o bien, dificultan la comprensión del propio problema. En 2º, únicamente en un 19,15% de los problemas, estas ayudas favorecen la comprensión del problema. También cabe tener en cuenta que este tipo de ayudas visuales o gráficas decrece progresivamente curso tras curso ya que los alumnos no necesitan de este tipo de ayudas para visualizar la situación planteada en el problema.

Guía: En el 62,05% de los problemas analizados en 1º, al alumno no se le proporciona ningún tipo de pista o ayuda extra que la que pudiera encontrar en la realidad. En 2º, este porcentaje aumenta y alcanza el 89,89%.

Requerimientos de resolución: En un elevado número de problemas (85,54%) el alumno no precisa de otros conocimientos previos ajenos a las matemáticas para resolver el problema. En los problemas analizados de 2º, este aspecto aumenta hasta el 91,49%.

5. PROPUESTA DE MEJORA

Tras analizar los resultados anteriores, se aprecian ciertos problemas en cuanto a la estructura de los problemas de matemáticas analizados y su grado de autenticidad. Una vez identificado los posibles factores comunes que afectan, en mayor medida, a los problemas de matemáticas analizados, propongo las siguientes mejoras:

En primer lugar, en cuanto a la estructura de los problemas de matemáticas, se observa una diferencia considerable entre los problemas consistentes, más fáciles desde el punto de vista cognitivo, sobre los problemas inconsistentes. Esta monotonía puede ser solventada añadiendo problemas de tipología variada y aumentando el número de problemas inconsistentes (problemas de CAMBIO 5 y CAMBIO 6, por ejemplo) y, por lo tanto, algo más difíciles desde el punto de vista cognitivo. De esta forma, satisfacemos las necesidades educativas de alumnos de mayor rendimiento en matemáticas que requieren de problemas con un grado de dificultad algo mayor para desarrollar al máximo todo su potencial. A raíz de los resultados en TIMSS, vistos anteriormente, en nuestro país hay un escaso número de alumnos con alto rendimiento en matemáticas. Con esta medida, se podría conseguir aumentar el número de alumnos de alto rendimiento en matemáticas al encontrarse con problemas que les exijan un esfuerzo cognitivo mayor.

En segundo lugar, en cuanto al grado de autenticidad de los problemas de matemáticas, los pobres resultados obtenidos en algunas variables como "Propósito del problema" demuestran que los problemas de matemáticas son utilizados en el aula como "recipientes" para practicar una determinada operación matemática sin tener en cuenta el contexto del problema ya que éstos, en su amplia mayoría como se aprecia en los resultados, carecen de un propósito para ser resueltos. Por lo tanto el alumno, para resolver el problema, le bastaría con identificar su estructura y operar con los datos que aparecen en el enunciado. Cabe recordar que el fin de los problemas aritméticos verbales consiste en tratar de simular situaciones del mundo real que deben ser resueltas aplicando una o varias operaciones matemáticas utilizando datos que son ofrecidos por dicho problema. Por consiguiente, como se ha venido afirmando a lo largo de este trabajo, cuanto más se aproximen los problemas de matemáticas a situaciones reales que el alumno pueda encontrarse fuera de la escuela, mejor preparado estará éste para saber afrontarlas. Al haber una relación directa entre problema de matemática y realidad, el alumno considerará éstos más útiles y prácticos además de, posiblemente, más fáciles de comprender y realizar ya que las situaciones planteadas serían muy similares a las que el alumno se encontraría en su día a día. Para conseguir un mayor grado de autenticidad en los problemas, se deberá cumplir con los criterios o variables de autenticidad anteriormente mencionados y tener más en cuenta el contexto real del alumno.

Con estas medidas que propongo, en mi opinión, si los libros de texto utilizaran problemas auténticos, se podría conseguir mejorar los resultados en matemáticas, en lo que a resolución de problemas se refiere entre nuestros alumnos. Además estos tipos de problemas, al simular mejor situaciones de la vida real y tener más en cuenta el contexto del alumno, no solo serían más interesantes para el alumno sino que serían percibidos como más útiles.

Para demostrar estas hipótesis, realizaré una prueba con alumnos de 1º y 2º de Educación Primaria para comprobar in situ si las mejoras que propongo funcionan y si se obtienen los resultados, a priori, esperados.

6. PRUEBA CON ALUMNOS DE 1º Y 2º DE EDUCACIÓN PRIMARIA

6.1. OBJETIVOS DE LA PRUEBA

Teniendo en cuenta la propuesta de mejora que acabo de exponer, llevaré a cabo un estudio o prueba que permita dar respuesta a algunas cuestiones.

La primera de ellas es comprobar si los alumnos realizan mejor problemas sacados del libro de texto que han sido modificados para hacerlos más auténticos que aquellos que no han sido modificados.

La segunda cuestión que quiero comprobar es si los problemas más auténticos y más próximos al contexto del niño son percibidos por el alumno como más interesantes y más útiles que aquellos que no lo son.

Por último, tras comprobar en el análisis de problemas, anteriormente realizado, que no aparecían, tanto en 1º como en 2º, problemas de los denominados “difíciles” desde el punto de vista cognitivo, la tercera cuestión que pretendo responder con este estudio es si los alumnos son capaces de resolver problemas inconsistentes, que requieren un esfuerzo cognitivo mayor, si éstos son auténticos y están relacionados con el contexto del alumno.

6.2. MÉTODO

MUESTRA

En este estudio han participado 85 alumnos, 37 niños y 48 niñas, de un centro concertado de Salamanca. Tanto el nombre del colegio como de los alumnos no serán mencionados para preservar su anonimato. De estos alumnos, 44 cursaban 1º de Educación Primaria (edad media 6 años y 5 meses) y los otros 41 cursaban 2º de Educación Primaria (edad media 7 años y 4 meses). La muestra fue dividida por cursos.

VARIABLES Y MEDIDAS

Para realizar este estudio, incluí 6 problemas, siguiendo la misma estructura en ambas pruebas, con alumnos de 1º y con alumnos de 2º. Los problemas, en este estudio, fueron divididos de la siguiente manera:

El problema número 1 es un problema no auténtico sacado directamente del libro de matemáticas que he analizado en este trabajo. El problema número 2 es el mismo problema anterior pero, en esta ocasión, aplicándole la propuesta de mejora, haciéndolo más auténtico.

En cuanto al problema número 3, éste es un problema no auténtico seleccionado del libro de matemáticas. El cuarto problema es un problema auténtico que ha sido creado siguiendo las variables de autenticidad de Palm & Burman (2004) (citadas en Depaepe *et al.,* 2009).

Por último, los dos últimos problemas son problemas inconsistentes, de los llamados “difíciles”. El problema número 5 ha sido creado de manera estándar, cómo podría aparecer en un libro de matemáticas y el número 6 ha sido creado de una forma más auténtica. Ambos problemas tienen en cuenta el contexto real del niño.

La justificación de selección de los problemas, tanto los de la prueba para 1º como los de la prueba para 2º, puede ser encontrada en el Anexo IV de este trabajo *(Ver Anexo IV: Prueba con alumnos de 1º y 2º de Educación Primaria*.

Junto con cada problema están incluidas tres escalas numéricas valoradas de 1 a 5 con el fin de conocer la opinión del alumno, marcando con una "X" en la casilla que decida, respecto a las siguientes variables: grado de dificultad del problema, grado de interés del problema y grado de utilidad de ese problema. Dichas escalas son:

PROBLEMA	1	2	3	4	5
¿Te gusta este problema?					
¿Es útil este problema?					
¿Es difícil este problema?					

CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS

Para determinar el nivel de éxito o acierto por el alumno en cada uno de los problemas, las respuestas de los alumnos se puntuaron como "1", si el alumno es capaz de resolver y plantear correctamente el problema planteado. Se puntuaron con "0,5" aquellas respuestas en las que el alumno haya realizado correctamente el planteamiento del problema pero haya errado en el resultado final. Por último, recibieron la puntuación de "0" las respuestas que hubieran errado tanto en la solución como en el planteamiento, así como la no existencia de respuesta para resolver el problema, puesto que se entenderá que no se supo resolver la cuestión planteada en ambos casos. He decidido realizar esta codificación ya que pretendo evaluar más el grado de comprensión del problema por parte del alumno que su capacidad de cálculo.

En cuanto a las tres escales numéricas, éstas están codificadas de 1 a 5, de la siguiente manera:

1	2	3	4	5
No, en absoluto	No	Más o menos	Sí	Sí, mucho

PROCEDIMIENTO

La prueba estaba formada por 6 problemas en total, estructurados de la forma que ha sido descrita anteriormente. La prueba era de aplicación colectiva y de resolución individual por parte de los alumnos. Con el fin de evitar la barrera de la comprensión lectora, muy importante en estas edades, todos los problemas fueron interpretados por mí de forma oral para asegurarme que los alumnos con diferente nivel de comprensión lectora no se vieran beneficiados o perjudicados en esta prueba, condicionando los resultados posteriores.

En cuanto a la temporalización, no hubo ninguna limitación de tiempo para la tarea. Una vez que se explicó a los alumnos cómo debían realizar la tarea, cada problema era narrado para todo el grupo, acto seguido los alumnos disponían del tiempo que necesitaran para completar cada tarea. La prueba fue realizada a cada grupo (2 grupos por cada curso) en el aula ordinaria y en el horario dedicado al área de Lengua Inglesa. La prueba se llevó a cabo durante dos días, 16 y 17 de junio del 2014. El primer día se realizó con un grupo de cada curso, concluyendo la prueba al día siguiente con los otros dos grupos restantes.

6.3. RESULTADOS

Los resultados de este estudio relacionados con la correcta resolución de los problemas están reflejados en la figura que aparece a continuación.

Por otro lado, los resultados pertenecientes a las tres escalas de valores (interés por el problema, utilidad del problema, dificultad del problema) incluidas al término de cada problema de la prueba están representados en las Figuras XI-XVI del Anexo IV de este trabajo. *(Ver Figuras XI-XVI, en Anexo IV: Prueba con alumnos de 1º y 2º de E. Primaria)*.

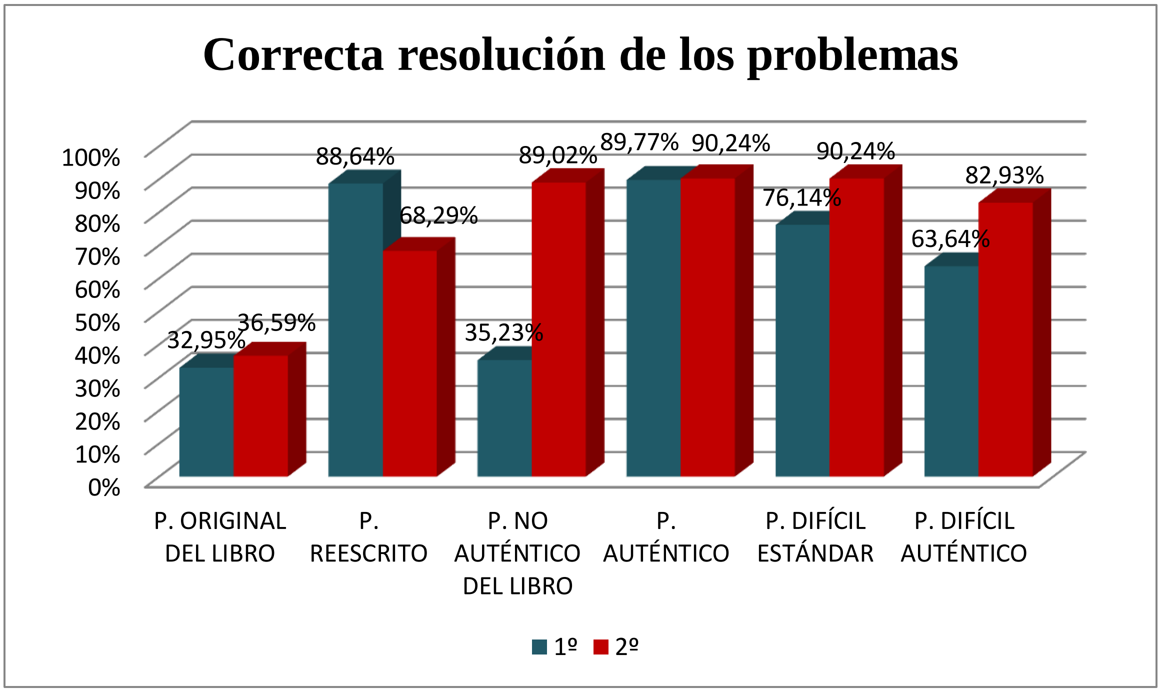


Figura X: Comparativa de los resultados obtenidos en la prueba con alumnos de 1º y 2º de E. Primaria.

6.4. VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Los resultados obtenidos en este estudio pueden sintetizarse de la siguiente manera:

1. La propuesta de mejora funcionó:

De acuerdo con mis hipótesis, la propuesta de mejora de la que partía funcionó mucho mejor de lo esperado. En 1º, solo el 32,95% de los alumnos supo hacer el problema estándar que fue sacado del libro. Este porcentaje de éxito alcanzó el 88,64% en la resolución del mismo problema reescrito de forma auténtica. Mismo resultado sucedió con los alumnos de 2º, pasando de un 36,59% de éxito en la resolución del problema del libro a un 68,29% en la resolución del mismo problema reescrito.

Además en ambos cursos se consideró el problema reescrito como más útil e interesante que el problema original del libro, además de más fácil de resolver como puede apreciarse en los diagramas de barras horizontales que aparecen en el Anexo IV. *(Ver Figuras XI-XVI, en Anexo IV: Prueba con alumnos de 1º y 2º de E. Primaria)*.

2. Los alumnos realizaron mejor los problemas auténticos y los percibieron como más útiles e interesantes que los problemas no auténticos:

Efectivamente, en ambos cursos el problema auténtico fue el que tuvo mayor porcentaje de éxito, 89,77% y 90,24% en 1º y 2º, respectivamente.

En cuanto al grado de interés y utilidad percibido por el alumno, aquellos problemas que tuvieron en cuenta el contexto del alumno y que se asemejaban más a situaciones reales fueron percibidos como muy útiles e interesantes en ambos cursos. Sin embargo, los problemas no auténticos que más se alejaban de situaciones cercanas al alumno fueron considerados como los menos útiles e interesantes, según la opinión de los alumnos.

3. Los alumnos demostraron que sí saben hacer problemas difíciles, desde el punto de vista cognitivo, si éstos están relacionados con situaciones cercanas a ellos y a su día a día:

Pese a no existir problemas inconsistentes como los de CAMBIO 5 o CAMBIO 6 en los libros de matemáticas de ambos cursos, analizados en este trabajo, ambos problemas "difíciles", sorprendentemente, fueron resueltos por un elevado número de alumnos. El problema difícil estándar fue resuelto por el 76,14% y 90,24% de los alumnos de 1º y 2º, respectivamente. El problema difícil auténtico también fue resuelto por un elevado número de alumnos, 63,64% y 82,93% en 1º y 2º.

Sin embargo, llama la atención que el problema difícil estándar haya sido resuelto por un mayor número de alumnos que el problema difícil auténtico y, a su vez, que éste sea percibido como más útil e interesante que su versión auténtica. Esto puede deberse a que, en estas edades tempranas, los problemas relacionados con dinero no son percibidos tan próximos como aquellos relacionados con pulseras de colores, en el caso de nuestro problema difícil estándar, u otros objetos con los que el niño esté más familiarizado que con el dinero. En relación a esto último, se puede apreciar en el gráfico cómo el problema difícil auténtico, relacionado con el dinero, es percibido como mucho más útil e interesante por los alumnos de 2º que por los de 1º. Lo cual puede demostrar que el valor que se le da al dinero aumenta progresivamente con la edad.

Por último, también resulta curioso el grado de dificultad que otorgaron los alumnos a ambos problemas inconsistentes. El problema difícil estándar y el problema difícil auténtico fueron considerados, respectivamente, como muy difíciles o difíciles de resolver por menos de la mitad de los alumnos tanto de 1º como de 2º. Incluso, más del 70% de los alumnos de 2º consideraron que ambos problemas no eran difíciles en absoluto (*Ver Figuras XI-XVI, en Anexo IV: Prueba con alumnos de 1º y 2º de E. Primaria*).

7. CONCLUSIONES

Una vez concluido el presente trabajo y tras analizar los distintos resultados obtenidos, las conclusiones a las que he llegado han sido:

7.1. CONCLUSIONES TRAS ANALIZAR LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Por un lado, los problemas de matemáticas que aparecen en los libros de texto no solo son monótonos en cuanto a estructura matemática se refiere, sino que tienen una baja dificultad cognitiva debido a que, como se apreció en los resultados analizados, la amplia mayoría son problemas consistentes. El problema derivado de esto es que los alumnos difícilmente sabrán resolver problemas de tipo inconsistente si apenas los han visto en clase. La gran cantidad de problemas consistentes que aparecen en los libros de texto podrían no estar permitiendo desarrollar al máximo el potencial de alumnos con altos niveles de rendimiento en matemáticas como se aprecia en los resultados de los estudiantes españoles en TIMSS-matemáticas 2011.

Por otro lado, en cuanto al grado de autenticidad de los problemas analizados, los resultados obtenidos fueron muy similares a los obtenidos por Depaepe *et al,* (2009). Hecho que hace ver que, en la actualidad, la relación estrecha entre los problemas de matemáticas y la realidad sigue sin existir. Por lo tanto los problemas de matemáticas no están cumpliendo con su función, la de simular lo más fielmente posible situaciones reales que el alumno podría encontrarse fuera de la escuela sin necesidad de tener ese contacto real. Es por ello que con los problemas de matemáticas que se realizan en la escuela no se está preparando al alumno para afrontar esas situaciones que podría encontrarse en su día a día sino que únicamente los problemas son meros "recipientes" que sirven para practicar una determinada operación aritmética o desarrollar una determinada destreza. La consecuencia de ello, como se está viendo en nuestros días, es que a los alumnos les cuesta ver cada vez más esa utilidad o esa aplicación práctica de las matemáticas en el mundo que les rodea.

7.2. CONCLUSIONES TRAS LA PRUEBA CON ALUMNOS DE 1º Y 2º DE E. PRIMARIA

Los resultados obtenidos en la prueba sirvieron para demostrar mis hipótesis y extraer tres conclusiones:

En primer lugar, la propuesta de mejora aportada no solo funcionó sino que se obtuvieron mejores resultados que los previstos. Como se vio en los resultados, el problema reescrito fue resuelto correctamente por un mayor número de alumnos, en ambos cursos, que su original. Lo cual demuestra que la teoría de Verschaffel (2000) y los estudios realizados por Depaepe *et al.,* (2009) reflejan adecuadamente la realidad.

En segundo lugar, los problemas auténticos, es decir aquellos que trataban de simular lo más fielmente posible una situación real, teniendo en cuenta el contexto del alumno, fueron mejor resueltos que aquellos que no lo eran. Además de ser mejor resueltos, fueron percibidos como más interesantes y más útiles por los alumnos, confirmando la hipótesis que se planteó antes de realizar la prueba. Por último, la mayoría de los alumnos en ambos cursos demostraron que son capaces de resolver problemas inconsistentes, de una dificultad cognitiva mayor, si éstos están relacionados con situaciones próximas a su realidad o contexto. Este hecho puede confirmar que la dificultad media de los problemas de matemáticas de los libros de texto es demasiado baja en relación a la capacidad de los alumnos. Por lo tanto estos problemas no permiten desarrollar el máximo potencial del alumno. Se necesitan problemas que exijan al alumno un esfuerzo cognitivo mayor.

7.3. CONCLUSIONES FINALES

¿QUÉ HA APORTADO ESTE TRABAJO AL ESTADO ACTUAL DE LA CUESTIÓN?

En los libros de texto de matemáticas se sigue sin tener en cuenta el razonamiento situacional. El Modelo Superficial de resolución de problemas sigue vigente en la actualidad ya que los problemas de matemáticas se siguen usando como “recipientes” para identificar una determinada estructura matemática, sin importar el contexto del problema o si éste se aproxima a la realidad del niño o no. Tras los resultados obtenidos en este trabajo se observa que la escasez de problemas inconsistentes que hay en los libros de texto de matemáticas no permite al alumno usar sistemas de resolución de problemas que requieran de un pensamiento situacional como el Modelo Genuino de Verschaffel. También se ha podido comprobar tras los resultados de la prueba que cuanto más se aproximan los problemas de matemáticas a situaciones cotidianas, es decir, cuanto más auténticos son estos problemas, más fáciles serán de resolver y serán percibidos como más útiles por los alumnos. Para conseguir tal objetivo, se deberá reescribir los problemas de matemáticas de los libros de texto para hacerlos más auténticos o sustituir aquellos problemas que no tienen en cuenta la realidad del alumno por otros que sí respetan su contexto, además de añadir una mayor cantidad de problemas inconsistentes que permitan al alumno desarrollar más su potencial. Con estas medidas quizás se consiga mejorar los resultados de nuestros alumnos en cuanto a resolución de problemas se refiere gracias a una vinculación estrecha entre los problemas de matemáticas de la escuela y las situaciones reales que éstos pretenden simular que preparen mejor al alumno para afrontar situaciones más variadas y de mayor complejidad cognitiva.

8. BIBLIOGRAFÍA

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2009). *Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders.* In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds), Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations, pp. 245-263.

Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 1*. Primer ciclo de Primaria. Ed. Grupo Anaya, 2007.

Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 2*. Primer ciclo de Primaria. Ed. Grupo Anaya, 2007.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *PIRLS - TIMSS 2011 Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE).

Mullis, I., Martin M., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics.* Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of Word problems.* The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). *Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas.* Infancia y Aprendizaje, 31 (4), pp. 463-483.

ANEXO I:
INFORME TIMSS 2011

Países (50)			Otros participantes (10)
Alemania	Georgia	Rumanía	Botsuana
Arabia Saudí	Hong Kong-China	Serbia	Honduras
Armenia	Hungría	Singapur	Yemen
Australia	Inglaterra	Suecia	Carolina del Norte, USA
Austria	Irán	Tailandia	Florida, USA
Azerbaiyán	Irlanda	Túnez	Quebec, Canadá
Baréin	Irlanda del Norte	Turquía	Ontario, Canadá
Bélgica (C. flamenca)	Italia	Yemen	Alberta, Canadá
Catar	Japón		Dubai, EAU
Chile	Kazajistán		Abu Dabi, EAU
China Taipei	Kuwait		
Corea	Lituania		
Croacia	Malta		
Dinamarca	Marruecos		
Emiratos Árabes Unidos	Noruega		
Eslovaquia	Nueva Zelanda		
Eslovenia	Omán		
España	Países Bajos		
Estados Unidos	Polonia		
Federación Rusa	Portugal		
Finlandia	República Checa		

Tabla II: Países participantes en TIMSS 2011 (extraída de MECD: Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2012, p. 10)

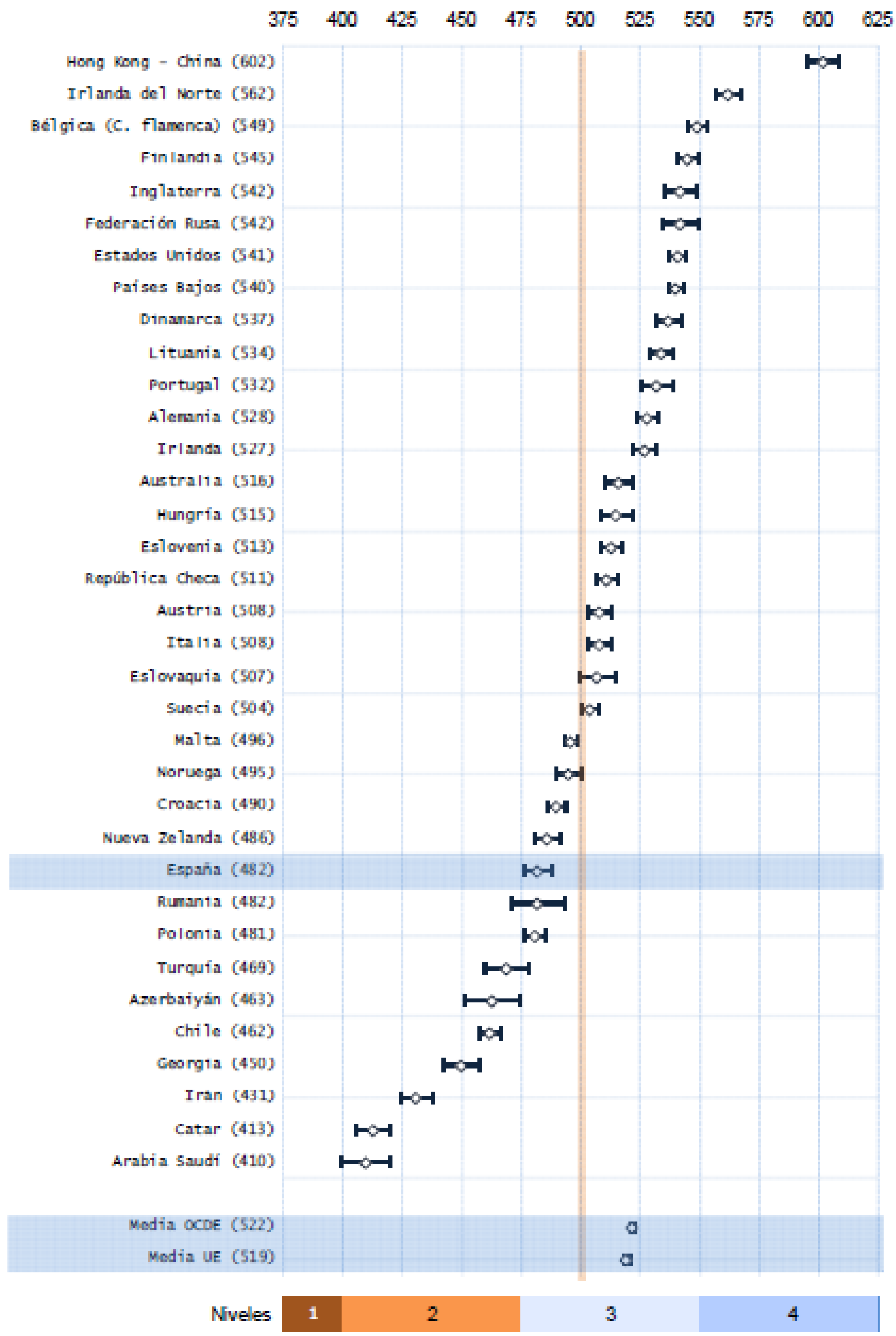


Figura III: Promedios globales en matemáticas en TIMSS 2011 (extraída de MECD: Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2012, p. 55)

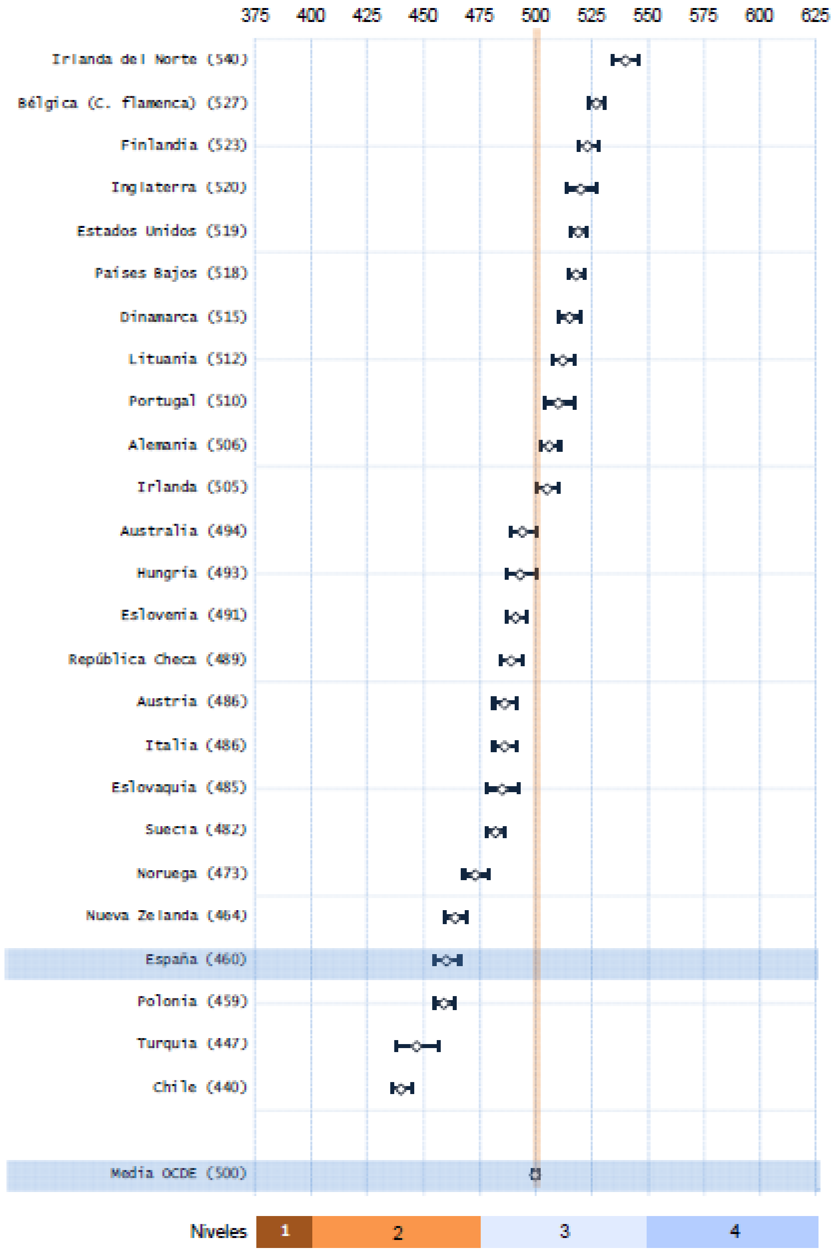


Figura IV: Promedios en matemáticas de los países OCDE en TIMSS 2011 (extraída de MECD: Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2012, p. 57)

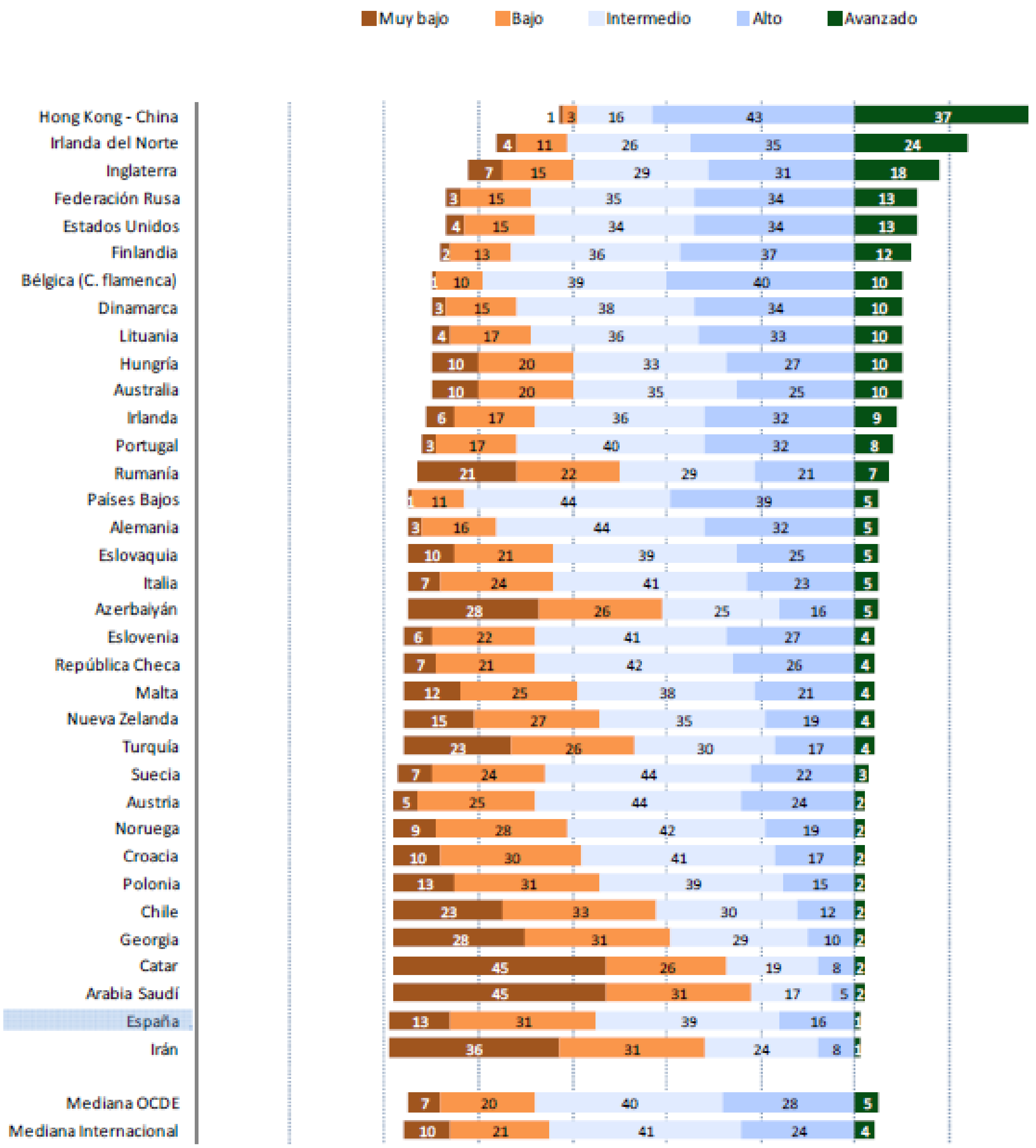


Figura V: Porcentajes de alumnos por niveles en TIMSS-matemáticas 2011 (extraída de MECD: Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2012, p. 60)

ANEXO II:
MARCO TEÓRICO

VARIABLE	PUNTUACIÓN	DESCRIPCIÓN
Evento *(event)*	**1**	El evento o situación del problema puede encontrarse en la vida real fuera del colegio.
	0	El evento o situación del problema es un hecho imaginario. Aunque incluya elementos del mundo real, el evento es ficticio. La tarea es puramente matemática y no tiene en cuenta el contexto del problema.
Pregunta *(question)*	**1**	La pregunta del problema podría llegar a ser realizada por el alumno. Es decir, se podría llegar a plantear la cuestión propuesta en el problema.
	0	El alumno, difícilmente, se plantearía la cuestión a resolver que propone el problema. La respuesta a esa pregunta carece de interés para el alumno. Es irrelevante.
Propósito del problema *(purpose)*	**1**	El propósito para resolver el problema está definido explícitamente en el problema.
	0	El propósito de la situación planteada en el problema no está claro.
Existencia de datos *(Existence of data)*	**1**	Los datos relevantes que son importantes para resolver la situación planteada en la realidad coinciden con los datos del problema.
	0	Los datos que son importantes o relevantes para resolver la situación planteada en la realidad no coinciden con los datos que aparecen en el problema.
Realismo de los datos *(Realism of data)*	**1**	Los números y valores dados en el problema son idénticos o muy cercanos a los números o valores de la situación simulada.
	0	Los números o valores de los datos del problema no se ajustan a la realidad.
Especificidad de los datos *(Specificity of data)*	**2**	El enunciado del problema describe una situación específica en la que sujetos, objetos y lugares están claramente definidos.
	1	La situación del problema no es del todo específica, es decir, sujetos, objetos y lugares no están claramente definidos.
	0	La situación del problema no es específica. Ni sujetos, objetos o lugares están definidos.

Uso del lenguaje *(Language use)*	**1**	El lenguaje que aparece en el enunciado del problema se corresponde con el que se emplearía en la situación simulada. El lenguaje utilizado en el problema no presenta dificultad alguna para el entendimiento del mismo.
	0	El lenguaje utilizado en el enunciado del problema es complejo, dificultando el entendimiento del problema.
Disponibilidad de estrategias resolutivas *(Availability of solutions strategies)*	**1**	La forma de resolver el problema que propone el libro de texto es similar a la que se llevaría a cabo en la situación simulada.
	0	La forma de resolver el problema propuesta por el libro no es la que se llevaría a cabo, normalmente, para resolver la situación simulada.
Herramientas externas *(External tools)*	**1**	Las herramientas externas que propone el libro de texto para resolver el problema (calculadora, gráficos, tabla de valores…) serían las mismas que se utilizarían para resolver la situación simulada.
	0	Las herramientas externas que propone el libro de texto para resolver el problema no se corresponderían con las empleadas para resolver la situación simulada.
Guía *(Guidance)*	**1**	La misma guía o ayuda que aparece en el problema sería la encontrada en la realidad.
	0	En el problema aparecen ayudas o guía que no se encontrarían en la situación simulada.
Requerimientos de resolución *(Solution requirements)*	**1**	Los requerimientos implícitos o explícitos para resolver la tarea se consideran similares a la situación de la vida real correspondiente.
	0	Los requerimientos implícitos o explícitos para resolver la tarea no se consideran similares a la situación de la vida real correspondiente.

Tabla I: Variables para analizar el grado de autenticidad de los problemas de matemáticas (adaptado de Palm & Burman, 2004, citado en Depaepe *et al.*, 2009)

ANEXO III:
ANÁLISIS DEL NIVEL DE DIFICULTAD COGNITIVA Y GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS:

PROBLEMAS DE CAMBIO (CA)	
TIPO	**EJEMPLO**
CA1	Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA2	Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA3	Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó algunas canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
CA4	Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió algunas canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?
CA5	Juan tenía algunas canicas. En una partida ganó 3 canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan?
CA6	Juan tenía algunas canicas. En una partida perdió 3 canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Juan?
PROBLEMAS DE COMPARACIÓN (CM)	
CM1	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?
CM2	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pedro menos que Juan?
CM3	Pedro tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
CM4	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
CM5	Juan tiene 8 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
CM6	Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
PROBLEMAS DE COMBINACIÓN (CO)	
CO1	Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene entre los dos?
CO2	Juan y Pedro tienen 8 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas (o Pedro tiene 5 canicas). ¿Cuántas canicas tiene Pedro (o Juan)?
PROBLEMAS DE IGUALACIÓN (IG)	
IG1	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que dar a Pedro para tener las mismas que Juan?
IG2	Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que quitar a Juan para tener las mismas que Pedro?
IG3	Pedro tiene 5 canicas. Si le dieran 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
IG4	Juan tiene 8 canicas. Si le quitaran 3 canicas tendría las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG5	Juan tiene 8 canicas. Si Pedro tuviera 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG6	Pedro tiene 5 canicas. Si a Juan le quitaran 3 canicas tendría las mimas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

Tabla IV: Tipos de problemas según su estructura matemática (adaptado de Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008, p. 465)

ASPECTOS PARA ANALIZAR EL GRADO DE AUTENTICIDAD DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS			
ASPECTO O VARIABLE	**PUNTUACIÓN**		
	1	**0,5**	**0**
EVENTO	- El evento o la situación descrita en el problema podría ser encontrada por el alumno fuera de la escuela.	- El evento o situación descrita en el problema podría encontrarse fuera de la escuela pero sería poco probable que le ocurriera al alumno.	- El evento o la situación descrita en el problema difícilmente podría ser encontrada por el alumno fuera de la escuela. - El problema solo tiene en cuenta la estructura matemática. La estructura situacional o contexto del problema es irrelevante.
PREGUNTA	- La pregunta que plantea el problema podría ser formulada por el alumno de forma habitual para resolver la situación descrita.	- La pregunta podría ser formulada en el contexto real pero sería poco frecuente que fuera planteada por el alumno.	- La pregunta que plantea el problema difícilmente se formularía en la realidad. - La pregunta carece de sentido en relación al enunciado del problema.
PROPÓSITO DEL PROBLEMA	- El propósito del problema está claro explícitamente. - El enunciado plantea de forma clara una situación que necesita ser resuelta justificando el porqué de la misma.	- El problema tiene un propósito más o menos claro para ser resuelto. -El propósito del problema aparece de forma implícita.	- El problema no tiene ningún propósito claro para ser resuelto. - La función del problema es realizar una determinada operación aritmética (sumar, restar, multiplicar o dividir) sin tener en cuenta el contexto del problema.
EXISTENCIA DE LOS DATOS	- Los datos que aparecen en el enunciado del problema son importantes para su resolución y coinciden con los datos a los que el alumno podría	- Los datos que aparecen en el enunciado del problema podrían existir en la realidad pero no estarían	- Los datos que aparecen en el enunciado del problema no serían accesibles para el alumno en la realidad. - Los datos que son

	acceder fuera de la escuela.	presentados de la misma forma (fracciones, forma decimal, diferentes unidades…).	relevantes para resolver la situación simulada no coinciden con los datos ofrecidos en el enunciado del problema.
REALISMO DE LOS DATOS	- Los números o valores de los datos del problema son idénticos o muy próximos a los valores que el alumno encontraría en la realidad.	- Los datos son imaginarios pero podrían darse en la realidad, hipotéticamente.	- Los datos del problema se alejan mucho de la realidad. No son realistas.
ESPECIFICIDAD DE LOS DATOS	- Los personajes, objetos y lugares del problema están definidos y son específicos. - El problema se refiere a una situación próxima al niño. - El problema está formulado en 1ª o 2ª persona, haciendo al alumno protagonista de la situación planteada.	- La situación planteada en el problema no es específica pero, al menos, el personaje, objeto o lugar del enunciado del problema son específicos. - El problema se refiere a una situación no necesariamente próxima al alumno.	- La situación planteada en el problema es general en la que los personajes, objetos y lugares no son específicos.
USO DEL LENGUAJE	- El enunciado del problema puede ser entendido por el alumno sin ningún problema. - La redacción del enunciado no dificulta la resolución del problema.	- El enunciado del problema puede resultar ligeramente complejo o confuso para el alumno pero no afectaría a la resolución del problema.	- El enunciado del problema no está claro, afectando a su resolución. -El alumno no sabría cómo resolver el problema debido a que el enunciado presenta: un vocabulario demasiado complejo, errores gramaticales y/o sintácticos, falta de coherencia y/o cohesión.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN	- La estrategia de resolución propuesta por el libro para resolver el problema sería la misma que el alumno utilizaría para resolver esa situación en la realidad.	- La estrategias de resolución propuesta por el libro podría ser una de las estrategias utilizadas por el alumno, normalmente, para resolver la situación planteada en la realidad.	- La estrategia de resolución propuesta por el libro de texto no se correspondería a la misma que el alumno utilizaría normalmente para resolver la situación planteada en la realidad.
AYUDAS GRÁFICAS O VISUALES	- Las viñetas, esquemas y demás ayudas visuales que aparecen en el problema están relacionados con la situación planteada, favoreciendo el entendimiento y resolución de la misma.	- Los elementos visuales que acompañan al problema ayudan al alumno a entender o visualizar la situación planteada en el enunciado. - Los elementos visuales no ayudan a resolver el problema planteado.	- Los elementos visuales no guardan relación con el enunciado del problema. -Los elementos visuales son puramente decorativos. No ayudan al alumno a entender ni resolver el problema. -Los elementos visuales que aparecen en el problema pueden llegar a confundir al alumno.
GUÍA	- Las pistas o ayudas que aparecen en el problema serían las mismas que el alumno encontraría en la vida real.	- Las pistas o ayudas que aparecen en el problema no serían encontradas, normalmente por el alumno en la realidad. - Las pistas o ayudas favorecen únicamente el entendimiento del problema pero no afectan a la resolución del mismo.	- Las pistas o ayudas que aparecen en el problema no serían encontradas por el alumno en la realidad. - En el problema aparece explícitamente cómo debe el alumno resolver el problema.
	- Los requerimientos tanto explícitos como implícitos para resolver el problema serían similares		- Los requerimientos tanto explícitos como implícitos para resolver el problema no serían similares a los

REQUERIMIENTOS DE RESOLUCIÓN	a los usados en la situación de la vida real correspondiente. - No se precisa de conocimientos previos ajenos a las matemáticas para resolver el problema.		usados en la situación de la vida real correspondiente. - Se precisa de conocimientos previos ajenos a las matemáticas para resolver el problema.

Tabla V: Marco teórico para el análisis del grado de autenticidad de los problemas de matemáticas (adaptado de Depaepe, De Corte y Verschaffel, 2009)

EJEMPLOS DEL PROCEDIMIENTO REALIZADO

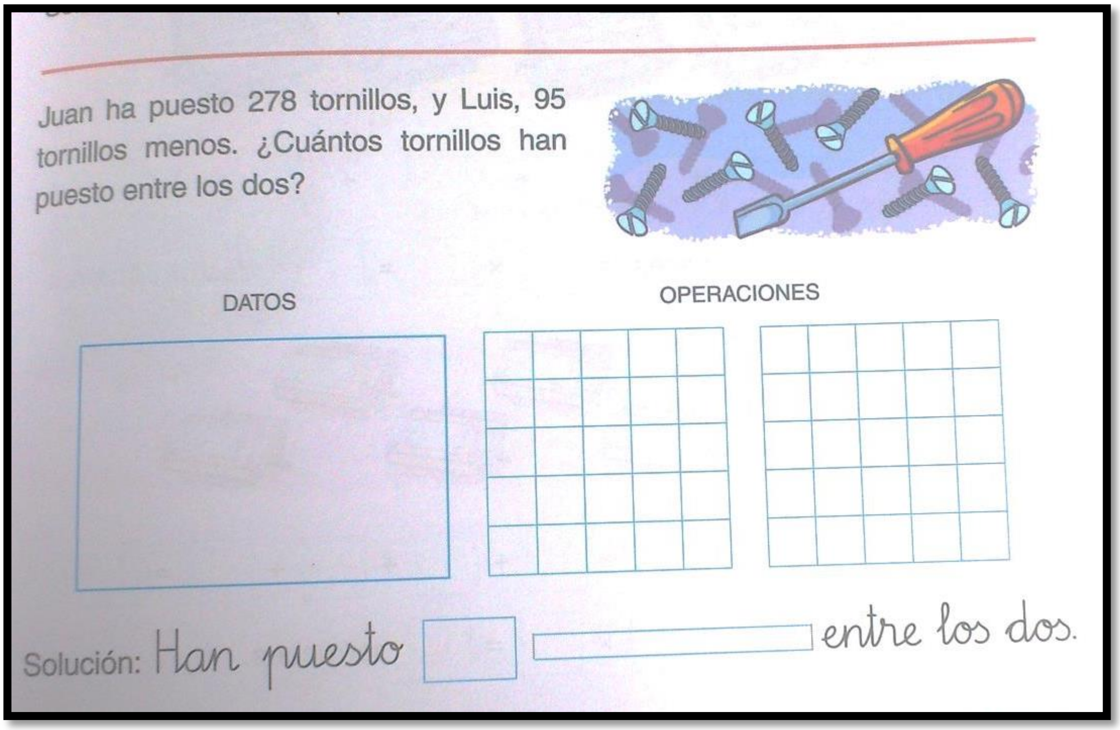
PROBLEMA 1

(Problema de matemáticas extraído de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 1*. Primer ciclo de Primaria, p. 51. Ed. Grupo Anaya, 2007)

PROBLEMA 1		
DIFICULTAD COGNITIVA		
TIPO DE PROBLEMA: CAMBIO 2	CONSISTENTE	
GRADO DE AUTENTICIDAD DEL PROBLEMA		
ASPECTO O VARIABLE	**PUNTUACIÓN**	**JUSTIFICACIÓN DE PUNTUACIÓN**
EVENTO	**1**	La situación planteada en el problema puede ser encontrada fácilmente por el alumno en la realidad.
PREGUNTA	**1**	La pregunta que aparece en el problema sí podría ser formulada por el alumno: *¿Cuántas pinturas faltan?*
PROPÓSITO DEL PROBLEMA	**0**	No aparece el propósito del problema. No hay un porqué que especifique la situación que plantea el problema.
EXISTENCIA DE LOS DATOS	**1**	Los datos del problema (pinturas que hay y pinturas que faltan) podrían ser accesibles para el alumno en la realidad.
REALISMO DE LOS DATOS	**1**	El valor de los datos se asemeja al valor de los datos en la realidad (número de pinturas que puede haber en un estuche)
ESPECIFICIDAD DE LOS DATOS	**0**	La situación planteada en el problema no es específica. No hay un sujeto o lugar específicos.
USO DEL LENGUAJE	**0,5**	El enunciado no especifica cuantas pinturas había antes. Pretende hacer entender que antes no faltaba ninguna pintura.
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN	**0**	El alumno, en la realidad, contaría los huecos que hay para saber las pinturas que faltan. No realizaría ninguna resta porque no sabría cuántas pinturas había antes.
AYUDAS GRÁFICAS O VISUALES	**1**	El dibujo del estuche resulta imprescindible para poder resolver el problema.
GUÍA	**0**	El libro ha incluido la operación que debería realizar el alumno para resolver el problema. El alumno se limita a poner los datos del problema en los cuadros dados. Esta pista puede confundir al alumno debido a que los datos del problema no aparecen en el enunciado.
REQUERIMIENTOS DE RESOLUCIÓN	**0**	Para resolver el problema, el alumno debe suponer que antes estaban todas las pinturas ya que en el problema no se especifica sobre cuantas pinturas había antes.

Tabla VI: Análisis del nivel de dificultad cognitiva y grado de autenticidad de un problema de matemáticas en 1º de E. Primaria.

PROBLEMA 2



(Problema de matemáticas extraído de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). Matemáticas 2. Primer ciclo de Primaria, p. 97. Ed. Grupo Anaya, 2007)

PROBLEMA 2		
DIFICULTAD COGNITIVA		
TIPO DE PROBLEMA: COMPARACIÓN 4 Y COMBINACIÓN 1 (Hay que hacer 2 operaciones)		
GRADO DE AUTENTICIDAD DEL PROBLEMA		
ASPECTO O VARIABLE	**PUNTUACIÓN**	**JUSTIFICACIÓN DE PUNTUACIÓN**
EVENTO	**0,5**	La situación podría encontrarse en la realidad pero difícilmente afectaría al alumno.
PREGUNTA	**0,5**	La pregunta podría ser formulada en la realidad pero es poco probable que un alumno de segundo de Educación Primaria se planteara esta pregunta: “¿Cuántos tornillos han puesto entre los dos?”

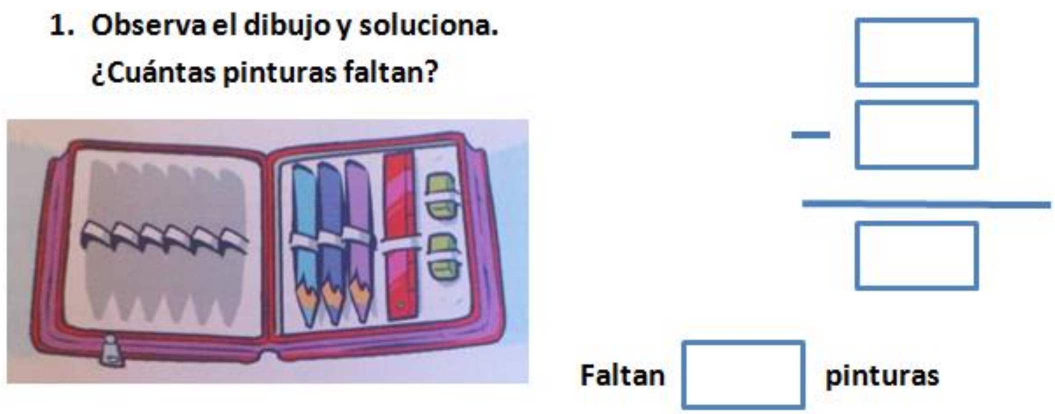
PROPÓSITO DEL PROBLEMA	**0**	No aparece el propósito del problema. No hay un porqué que especifique la situación que plantea el problema.
EXISTENCIA DE LOS DATOS	**1**	Los datos del problema (número de tornillos que han sido puestos) podrían ser accesibles para el alumno en la realidad.
REALISMO DE LOS DATOS	**0**	El valor de los datos no se asemeja mucho a los valores propios de la situación real correspondiente. El protagonista del problema ha puesto nada menos que 278 tornillos, cifra no muy realista.
ESPECIFICIDAD DE LOS DATOS	**0,5**	La situación planteada en el problema no es específica pero, al menos, los personajes (Juan y Luis) y el objeto (tornillos) son concretos.
USO DEL LENGUAJE	**0,5**	La pregunta "¿Cuántos tornillos han puesto entre los dos?" no ayuda al alumno a saber que debe calcular la cantidad total de tornillos y no, las cantidades por separado.
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN	**1**	La estrategia que propone este libro para resolver el problema sería la misma que el alumno utilizaría en la realidad: averiguar la cantidad de tornillos que ha puesto Juan y después sumar ambas cantidades para hallar el total.
AYUDAS GRÁFICAS O VISUALES	**1**	En el problema aparecen dos cuadros para hacer operaciones, favoreciendo la resolución del problema ya que hay que hacer dos operaciones para hallar la solución.
GUÍA	**0**	La inclusión de los dos cuadros de operaciones en el problema hace que el alumno no tenga que pensar cuantas operaciones serán necesarias para resolver el problema. Fuera de la escuela, el alumno no tendría esta pista o ayuda para resolver este tipo de problemas.
REQUERIMIENTOS DE RESOLUCIÓN	**1**	Para resolver el problema, el alumno no necesita conocimientos previos ajenos a las matemáticas.

Tabla VII: Análisis del nivel de dificultad cognitiva y grado de autenticidad de un problema de matemáticas en 2º de E. Primaria.

ANEXO IV:
PRUEBA CON ALUMNOS DE 1º Y 2º DE EDUCACIÓN PRIMARIA

PROBLEMAS INCLUIDOS EN LA PRUEBA DE 1º

PROBLEMA 1: PROBLEMA ESTÁNDAR SACADO DIRECTAMENTE DEL LIBRO DE MATEMÁTICAS



(Problema de matemáticas extraído de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 1.* Primer ciclo de Primaria, p. 51. Ed. Grupo Anaya, 2007)

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Problema estándar muy similar a los encontrados en cualquier libro de matemáticas de 1º cuya solución, con las ayudas excesivas que aporta el libro, a priori, parece sencilla. La estructura del problema es de CAMBIO 2. Estructura que predomina en los problemas de 1º.

PROBLEMA 2: PROBLEMA DEL LIBRO MEJORADO.

2. Tienes un estuche con 9 pinturas de colores. Le dejas algunas pinturas a un compañero para que pinte un dibujo pero, cuando termina la clase, se te olvida pedírselas. Por la tarde en casa, abres el estuche y ves que solo tienes 3 pinturas.

¿Cuántas pinturas te faltan?

SOLUCIÓN: Te faltan $\boxed{\quad}$ **pinturas**

(Problema de matemáticas adaptado de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 1*. Primer ciclo de Primaria, p. 51. Ed. Grupo Anaya, 2007)

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
El siguiente problema ha sido reescrito siguiendo las variables de autenticidad, según la teoría de Palm & Burman, 2004, citado en Depaepe et al. 2009. Para ello, se ha especificado la cantidad inicial de pinturas que había en el estuche y se ha quitado la ayuda que daba el libro con la operación que se debe realizar. Además el problema ha sido reescrito en 2ª persona, siendo el alumno el protagonista del problema. Con esta reescritura situacional, el contexto del problema es más próximo al niño, más real y, principalmente, ahora el problema adquiere un propósito para ser resuelto. La estructura del problema se mantiene.

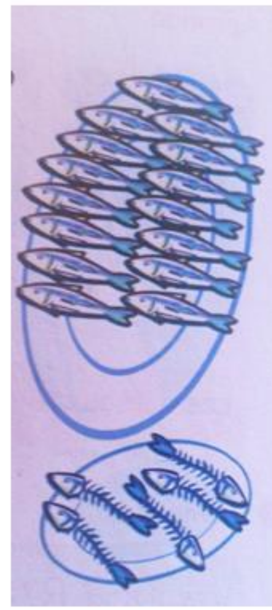
PROBLEMA 3: PROBLEMA NO AUTÉNTICO SACADO DEL LIBRO DE MATEMÁTICAS

3. En una fuente hay ☐ sardinas y en un plato hay ☐ raspas.

¿Cuántas sardinas había?

DATOS **OPERACIÓN**

SOLUCIÓN: Había ☐ sardinas



(Problema de matemáticas extraído de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 1*. Primer ciclo de Primaria, p. 151. Ed. Grupo Anaya, 2007)

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
El siguiente problema no auténtico no tiene en cuenta el contexto real del alumno ya que es poco probable que un alumno de esta edad (6-7 años) se cuestione este problema o que ni siquiera sepa lo que son las raspas de pescado. Además su resolución resulta confusa ya que no está clara la estructura del problema. Consultando el libro de matemáticas del que procede este problema, éste sería un problema de COMBINACIÓN 1 al distinguirse dos conjuntos: sardinas y raspas.

PROBLEMA 4: PROBLEMA AUTÉNTICO

4. **Es tu cumpleaños y compras una bolsa de 30 piruletas para tus compañeros y compañeras de clase. Después de haber dado 20 piruletas a tus compañeros, algunos compañeros te preguntan si te quedan más piruletas en la bolsa porque les ha tocado una piruleta rota.**

¿Cuántas piruletas te quedan ahora en la bolsa?

SOLUCIÓN: Quedan $\boxed{}$ piruletas en la bolsa.

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
El siguiente problema es auténtico ya que cumple con las variables de autenticidad de Palm & Burman, 2004, citado en Depaepe et al. 2009. Asimismo representa una situación que un niño de 1º de Educación Primaria podría encontrarse en la realidad. El alumno es el sujeto del problema. El problema tiene un propósito claro para ser resuelto. Por último se ha añadido una imagen con 30 piruletas para ayudar al alumno a visualizar la situación que plantea el problema.

PROBLEMA 5: PROBLEMA DIFÍCIL ESTÁNDAR.

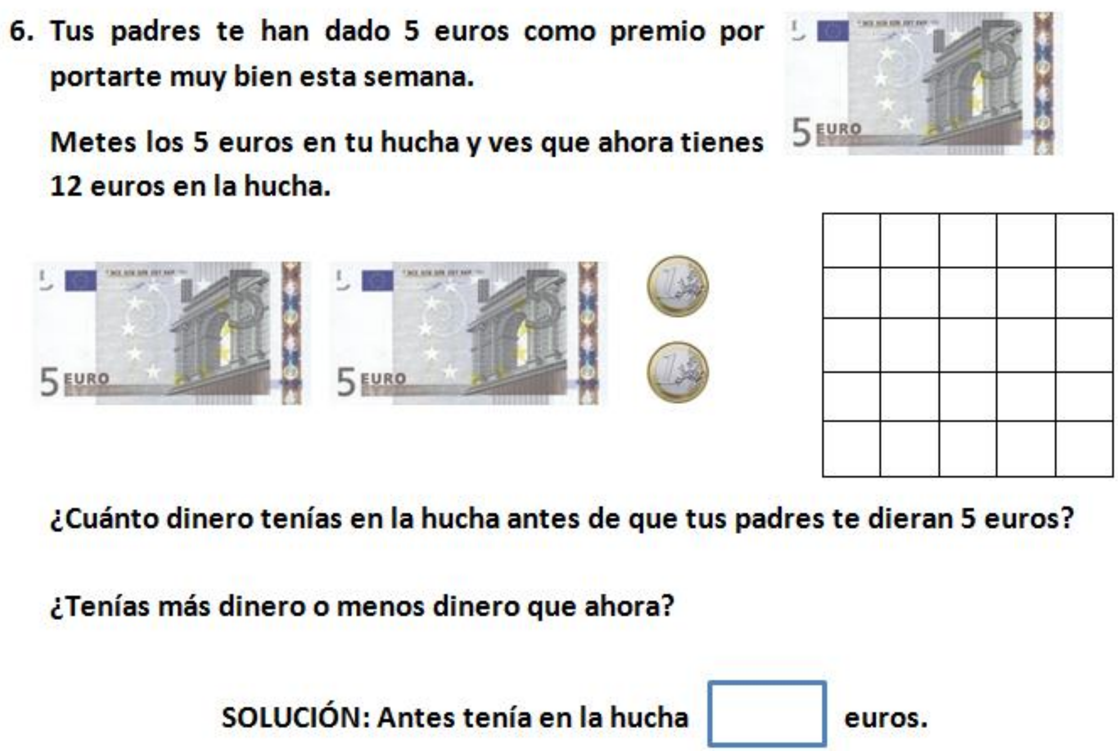
5. José tiene pulseras de colores. Un día regala 6 pulseras de colores a sus amigos y amigas. Ahora a José le quedan 4 pulseras de colores.

¿Cuántas pulseras de colores tenía José al principio?

SOLUCIÓN: Al principio José tenía ☐ **pulseras de colores**

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Problema inconsistente de CAMBIO 6, de una dificultad mayor para el niño ya que en este tipo de problemas se desconoce la cantidad inicial. Está escrito de una manera estándar, es decir, aportando únicamente los datos necesarios para resolver el problema, como podría aparecer en cualquier libro de matemáticas. Por último se ha tenido en cuenta la realidad del alumno utilizando pulseras de colores como objeto del problema, añadiendo una imagen de las mismas para, únicamente, hacer más atractivo el problema para el alumno.

PROBLEMA 6: PROBLEMA DIFÍCIL AUTÉNTICO



6. Tus padres te han dado 5 euros como premio por portarte muy bien esta semana.

Metes los 5 euros en tu hucha y ves que ahora tienes 12 euros en la hucha.

¿Cuánto dinero tenías en la hucha antes de que tus padres te dieran 5 euros?

¿Tenías más dinero o menos dinero que ahora?

SOLUCIÓN: Antes tenía en la hucha [ ] euros.

(Imágenes de las monedas y billetes extraídas el 12 de junio de 2014 desde (http://3y4eprimariasanjose.blogspot.com.es/2014/02/euros-y-centimos.html)).

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Problema inconsistente de CAMBIO 5, difícil desde el punto de vista cognitivo. En esta ocasión escrito de forma auténtica. El enunciado describe, en 2ª persona, una situación que al alumno podría encontrar fácilmente fuera de la escuela. Se han añadido ayudas visuales representando las cantidades de dinero que aparecen en el enunciado para ayudar al alumno a entender mejor la situación descrita, así como una ayuda textual en forma de pregunta: “¿Tenías más dinero o menos dinero que ahora?”

PROBLEMAS INCLUIDOS EN LA PRUEBA DE 2º

PROBLEMA 1: PROBLEMA ESTÁNDAR SACADO DIRECTAMENTE DEL LIBRO DE MATEMÁTIC

1. Juan ha puesto 278 tornillos, y Luis, 95 tornillos menos.

¿Cuántos tornillos han puesto entre los dos?

DATOS

OPERACIONES

SOLUCIÓN: Han puesto ☐ **tornillos entre los dos.**

(Problema de matemáticas extraído de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 2*. Primer ciclo de Primaria, p. 97. Ed. Grupo Anaya, 2007)

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Problema complejo, ya que se requiere de dos operaciones para ser resuelto (COMPARACIÓN 4 y COMBINACIÓN 1) sacado del libro de matemáticas. Problema no auténtico ya que los datos que aparecen en el problema son poco realistas. No aparece un propósito claro para resolver la cuestión planteada.

PROBLEMA 2: PROBLEMA DEL LIBRO MEJORADO.

2. **Dos carpinteros, Juan y Luis, tienen que poner tornillos para montar unos muebles. Juan ha puesto 75 tornillos. Luis, que empezó más tarde, ha puesto 24 tornillos menos que Juan.**

¿Cuántos tornillos han puesto Juan y Luis en total?

DATOS **OPERACIONES**

SOLUCIÓN: Juan y Luis han puesto ☐ **tornillos en total.**

(Problema de matemáticas adaptado de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). Matemáticas 2. Primer ciclo de Primaria, p. 97. Ed. Grupo Anaya, 2007)

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Las mejoras realizadas en este problema con respecto al original han sido ajustar el realismo de los datos del problema y reescribir el enunciado de forma que represente una situación más real.

PROBLEMA 3: PROBLEMA NO AUTÉNTICO SACADO DEL LIBRO DE MATEMÁTICAS

3. Marisol ha obtenido ocho puntos en la tómbola, y Paco, el triple.

¿Cuántos puntos ha obtenido Paco?

Paco ha obtenido ☐ **puntos**

☐ ○ ☐ **=** ☐

(Problema de matemáticas obtenido de: Ferrero, J., Jiménez, M. y Martín G. (2007). *Matemáticas 2*. Cuaderno 2. Primer ciclo de Primaria, p. 33. Ed. Grupo Anaya, 2007)

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Típico problema de estructura multiplicativa: grupos iguales. Este es un claro ejemplo de problema que no tiene en cuenta los intereses o contexto del alumno ya que muchos de los alumnos, en esta edad (7-8 años) no saben qué es una tómbola. Además el problema no presenta ningún propósito para ser resuelto. Ha sido diseñado únicamente para practicar la multiplicación.

PROBLEMA 4: PROBLEMA AUTÉNTICO

4. Quieres completar un álbum de cromos de fútbol que tiene 639 cromos en total. Si ya tienes 425 cromos pegados en el álbum, ¿cuántos cromos te faltarían para completar el álbum de cromos de fútbol?

SOLUCIÓN: Me faltan ____ **cromos para completar el álbum.**

(Imagen de álbum y cromos de fútbol extraídas el 14 de junio de 2014 desde (http://2014fifaworldcupbrazil.paninigroup.com/es/home))

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Este problema de CAMBIO 2 tiene en cuenta la realidad del alumno. El problema simula perfectamente una situación real que el alumno podría encontrarse fuera de la escuela, siendo el alumno el sujeto del problema. Además existe un propósito claro para ser resuelto: “saber cuántos cromos me faltan”. Se decidió añadir la imagen del álbum y los cromos de fútbol para hacerlo más atractivo y motivador para el alumno.

PROBLEMA 5: PROBLEMA DIFÍCIL ESTÁNDAR.

5. **José tiene pulseras de colores. Un día regala 6 pulseras de colores a sus amigos y amigas. Ahora a José le quedan 15 pulseras de colores.**

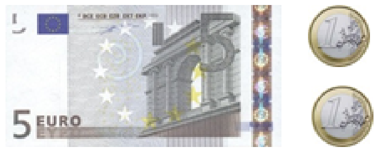
¿Cuántas pulseras de colores tenía José al principio?

SOLUCIÓN: Al principio José tenía ____ pulseras de colores

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Problema inconsistente de CAMBIO 6 igual al empleado en la prueba de 1º con la única modificación de la cantidad final de pulseras que ha sido cambiada.

PROBLEMA 6: PROBLEMA DIFÍCIL AUTÉNTICO

6. **Tus padres te han dado 7 euros como premio por portarte muy bien esta semana.**



Metes los 7 euros en tu hucha con el dinero que ya tenías ahorrado y ves que ahora tienes 22 euros en la hucha.

¿Cuánto dinero tenías en la hucha antes de que tus padres te dieran 7 euros?

SOLUCIÓN: Antes tenía en la hucha ______ euros.

(Imágenes de las monedas y billetes extraídas el 12 de junio de 2014 desde (http://3y4eprimariasanjose.blogspot.com.es/2014/02/euros-y-centimos.html)).

JUSTIFICACIÓN DE SELECCIÓN DEL PROBLEMA
Problema inconsistente de CAMBIO 5 igual al empleado con los alumnos de 1º pero en este problema se ha quitado una de las ayudas gráficas, la que representaba la cantidad inicial, y se ha añadido el término “dinero ahorrado” para referirse al conjunto inicial. También se ha suprimido la guía de “¿tenías más o menos dinero que ahora?” ya que en este curso se consideró innecesaria.

RESULTADOS CORRESPONDIENTES A LAS ESCALAS DE VALORES EN 1º y 2º

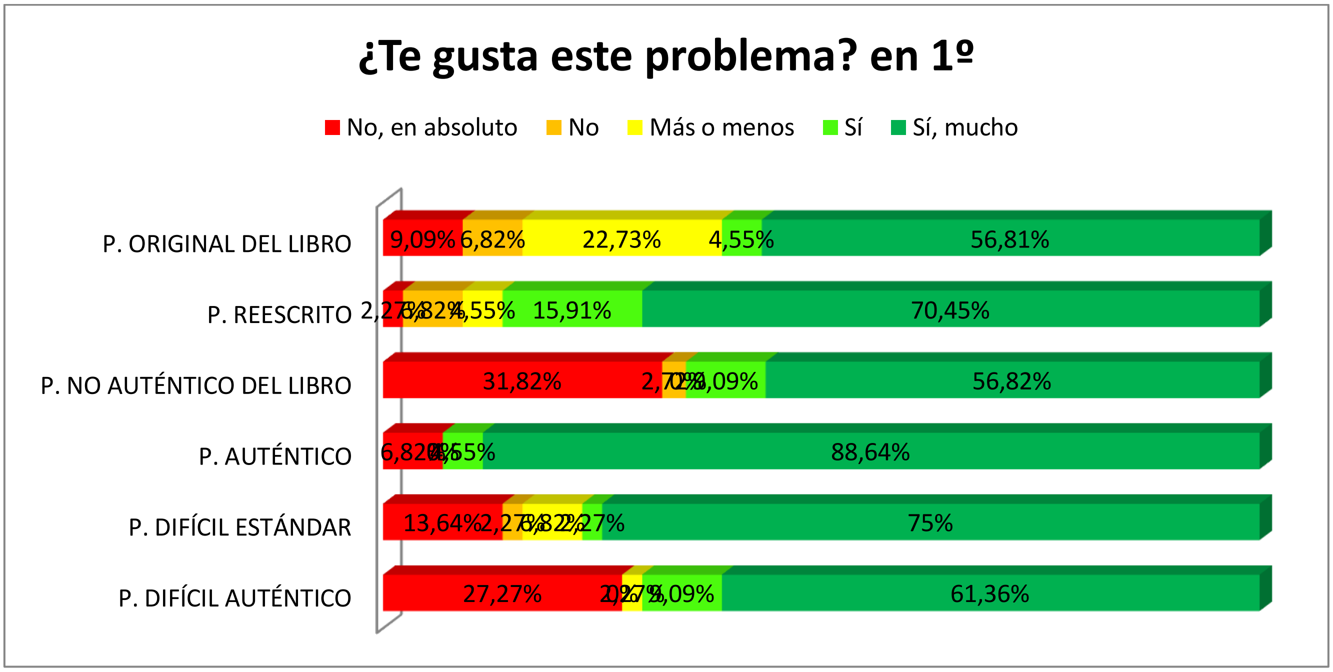


Figura XI: Grado de Interés mostrado por los problemas en 1º

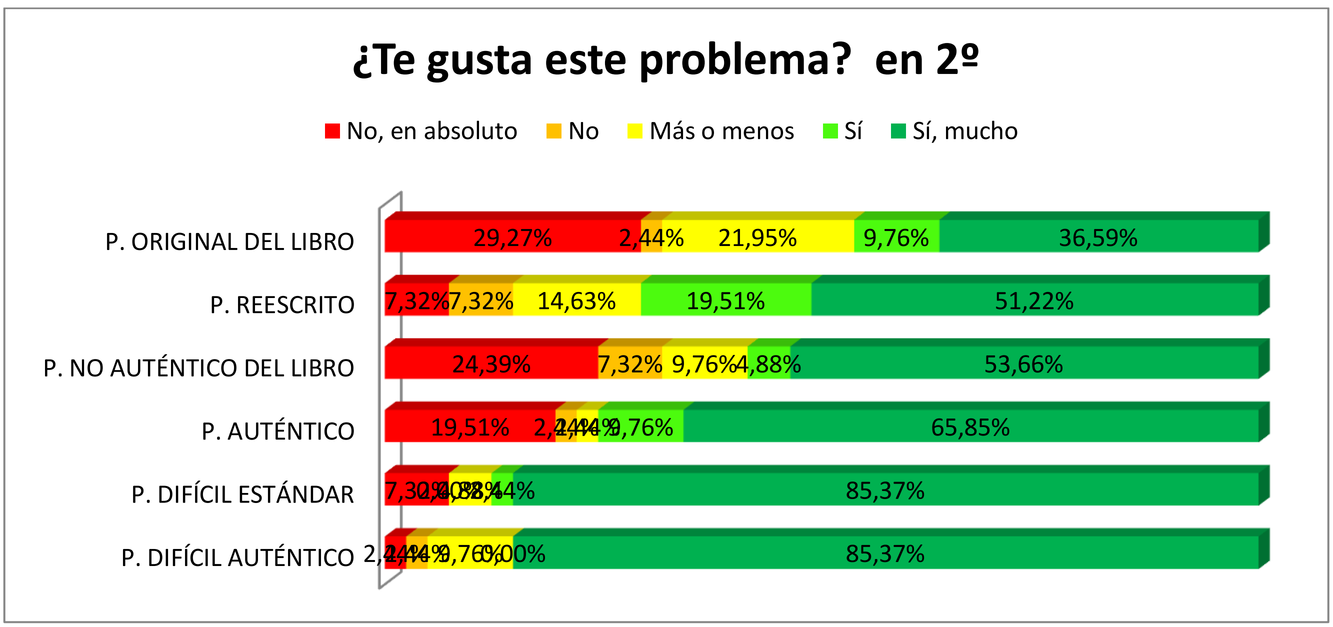


Figura XII: Grado de Interés mostrado por los problemas en 2º

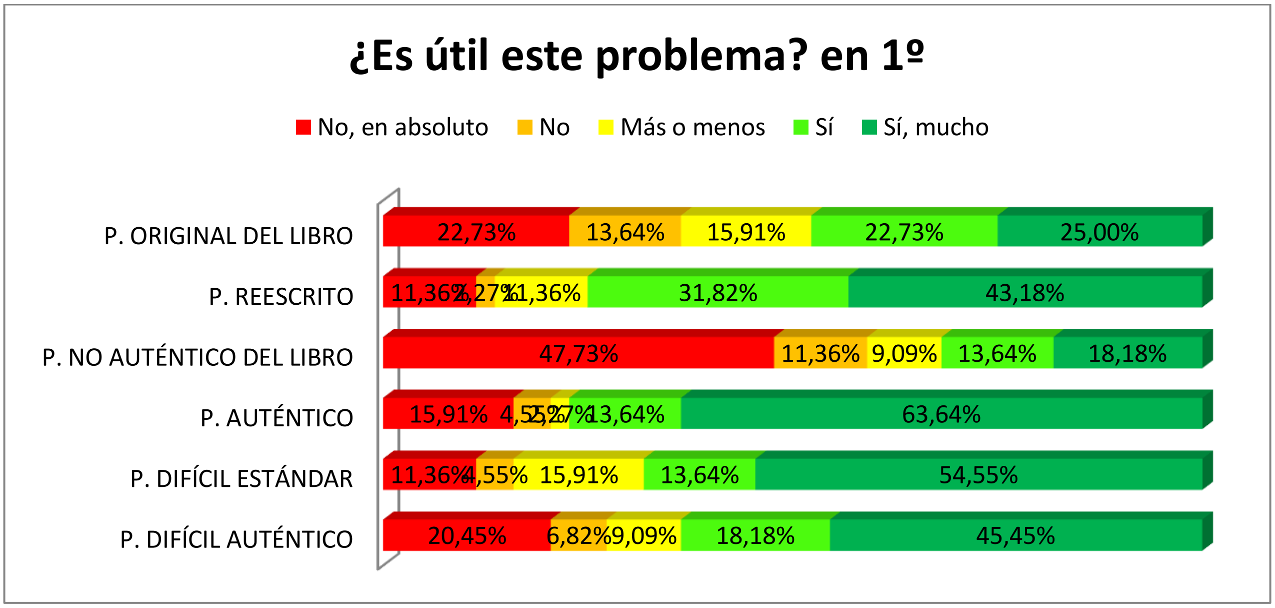


Figura XIII: Percepción de grado de utilidad de los problemas en 1º

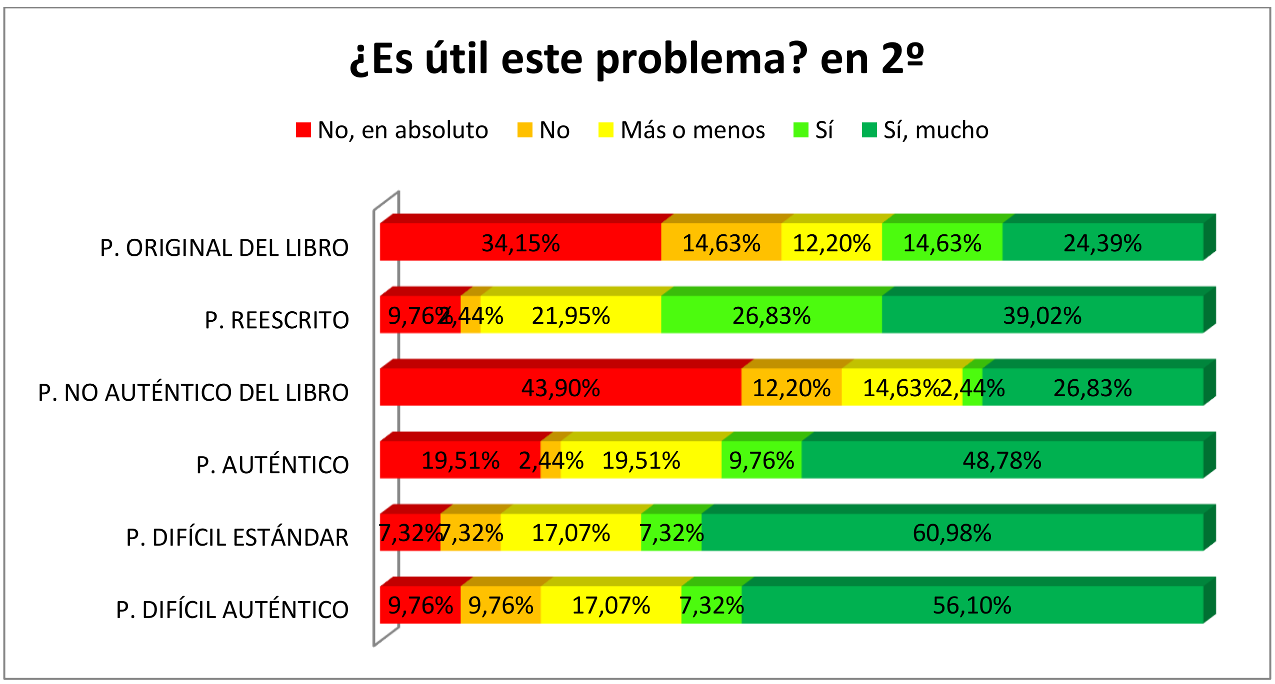


Figura XIV: Percepción de grado de utilidad de los problemas en 2º

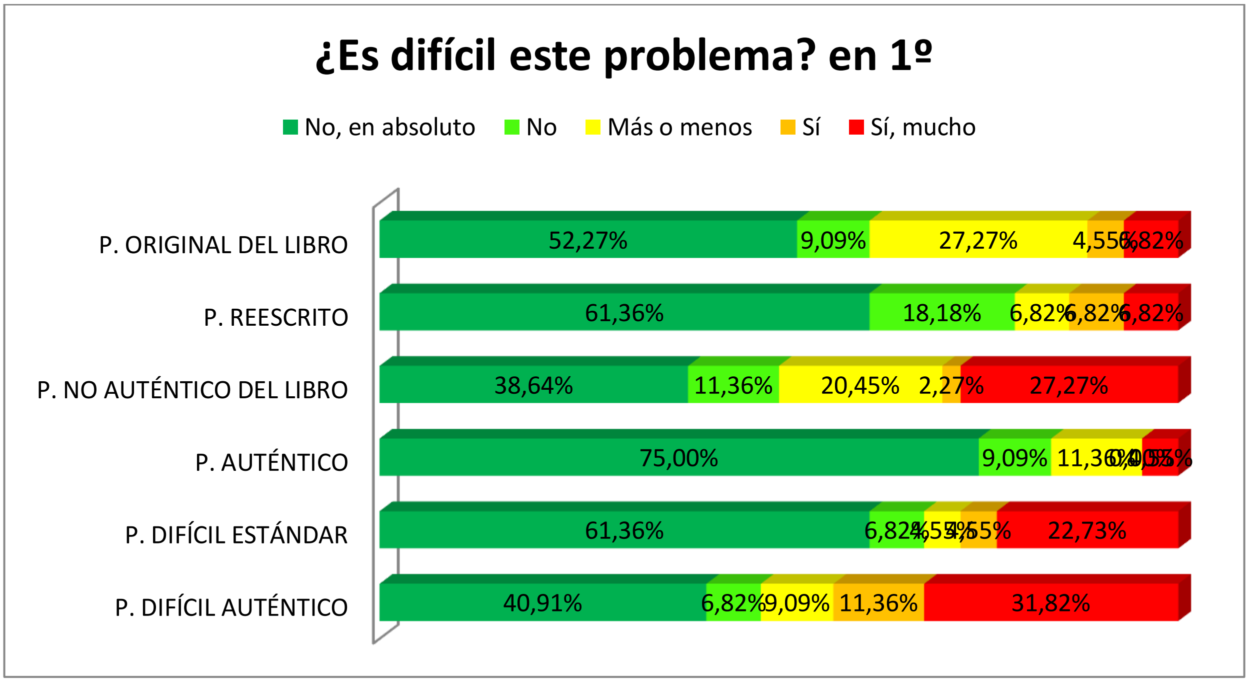


Figura XV: Percepción del nivel de dificultad de los problemas en 1º

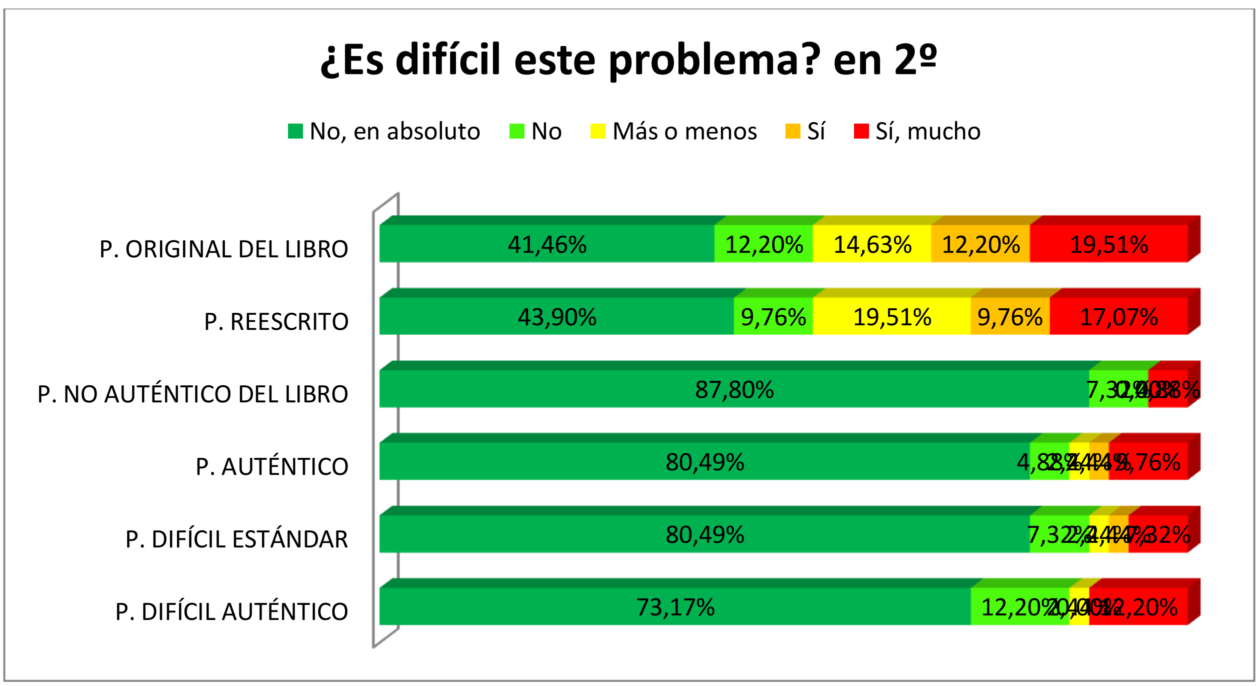


Figura XVI: Percepción del nivel de dificultad de los problemas en 2º